

**Der Kapazitätsgewinn durch die  
ganzheitliche Beschreibung von  
Kabelbündeln und seine  
technische und ökonomische  
Nutzbarkeit**

Rolf Matzner

**DISTRIBUTION STATEMENT A:**  
Approved for Public Release -  
Distribution Unlimited

**REPORT DOCUMENTATION PAGE**

Form Approved OMB No. 0704-0188

Public reporting burden for this collection of information is estimated to average 1 hour per response, including the time for reviewing instructions, searching existing data sources, gathering and maintaining the data needed, and completing and reviewing the collection of information. Send comments regarding this burden estimate or any other aspect of this collection of information, including suggestions for reducing this burden to Washington Headquarters Services, Directorate for Information Operations and Reports, 1215 Jefferson Davis Highway, Suite 1204, Arlington, VA 22202-4302, and to the Office of Management and Budget, Paperwork Reduction Project (0704-0188), Washington, DC 20503.

1. AGENCY USE ONLY (Leave blank)	2. REPORT DATE 2000	3. REPORT TYPE AND DATES COVERED Dissertation	
4. TITLE AND SUBTITLE  Der Kapazitaetsgewinn durch die ganzheitliche Beschreibung von Kabelbuendeln und seine technische und oekonomische Nutzbarkeit  Capacitance Gain by means of the thorough Description of Cable Bundles and its Technical and Economic Usefulness		5. FUNDING NUMBERS	
6. AUTHOR(S)  Rolf Matzner			
7. PERFORMING ORGANIZATION NAME(S) AND ADDRESS(ES)  Fakultaet fuer Elektrotechnik, Universitaet der Bundeswehr Muenchen		8. PERFORMING ORGANIZATION Report Number REPORT NUMBER	
9. SPONSORING/MONITORING AGENCY NAME(S) AND ADDRESS(ES)		10. SPONSORING/MONITORING AGENCY REPORT NUMBER	
11. SUPPLEMENTARY NOTES  Text in German. Title and abstract in German and English, 151 pages.			
12a. DISTRIBUTION/AVAILABILITY STATEMENT  Distribution A: Public Release.		12b. DISTRIBUTION CODE	
ABSTRACT (Maximum 200 words)  Matzner's speciality is transmission, this his first chapter deals with the symmetrical double loaders in the local connection network (OAsL) and their significance for transmission today and in the future. He then describes the MIMO (Multiple Input-Multiple Output) structure of the OAsL and some troubleshooting; and then the transmission system for multi-source, multi-decrease and a MIMO channel. The expansive fifth chapter is devoted to the capacitance of the MIMO channel. The MIMO transmission system is then considered in terms of the time and frequency. The value of a technical example using the MIMO system comprises the eight and final chapter.			
14. SUBJECT TERMS  German, UNIBW, Transmission, Multiple Input-Multiple Output system, Local connection network		15. NUMBER OF PAGES	
		16. PRICE CODE	
17. SECURITY CLASSIFICATION OF REPORT  UNCLASSIFIED	18. SECURITY CLASSIFICATION OF THIS PAGE  UNCLASSIFIED	19. SECURITY CLASSIFICATION OF ABSTRACT  UNCLASSIFIED	20. LIMITATION OF ABSTRACT  UNLIMITED

NSN 7540-01-280-5500

Standard Form 298 (Rev. 2-89)  
Prescribed by ANSI Std. Z39-18  
298-102

---

**Der Kapazitätsgewinn durch die  
ganzheitliche Beschreibung von  
Kabelbündeln und seine  
technische und ökonomische  
Nutzbarkeit**

Rolf Matzner

20021122 166 }

**Reproduced From  
Best Available Copy**

**Copies Furnished to DTIC  
Reproduced From  
Bound Originals**

Universität der Bundeswehr München  
Fakultät für Elektrotechnik (Energie- und Informationstechnik)  
Institut für Nachrichtentechnik

Der Kapazitätsgewinn durch die ganzheitliche  
Beschreibung von Kabelbündeln und seine technische  
und ökonomische Nutzbarkeit

Rolf Matzner

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Elektrotechnik  
der Universität der Bundeswehr München  
zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs  
(Dr.-Ing.)

genehmigten Dissertation

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. K. P. Michels  
1. Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. K. Tröndle  
2. Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. habil. W. Wolf

Tag der Promotion: 12. April 2000



## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in ihren wesentlichsten Teilen im Rahmen der Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter und Assistent am Institut für Nachrichtentechnik der Universität der Bundeswehr München.

Dreh- und Angelpunkt der gesamten Arbeit ist die *Perspektive*, der *Blickwinkel*, unter dem man ein bestimmtes Problem betrachtet. Das konkrete Ergebnis der Arbeit – Datenübertragung über Kabelbündel kann bei Einsatz eines ganz bestimmten Verfahrens mit einer besonders hohen Bitrate erfolgen und ist dann gleichzeitig besonders wirtschaftlich – entstand unter zwei begünstigenden Voraussetzungen: Zum einen fördert nur eine Atmosphäre von geistiger Freiheit und (weitestgehender) terminlicher Ungebundenheit einen wirklich großen *Blickwinkel*, und damit das Entdecken jener *Perspektiven*, die besonders verlockende Aussichten bieten. Dem Sprecher des Instituts, meinem Doktorvater und Lehrer, Herrn Professor Tröndle sei an dieser Stelle herzlich dafür gedankt, dass er an seinem Institut stets diesen Geist von Freiheit und Kreativität zu fördern wusste.

Zum anderen stand ein Teil dieser Arbeit – die Analyse des Aufwands und die Betrachtung der wirtschaftlichen Effizienz – bereits unter dem Einfluss meiner anschließenden Aufgabe als Mitgründer und Finanzvorstand der Syntion AG. Worauf kommt es an? Wiederum auf die Weite des *Blickwinkels*, darauf, denselben Gegenstand unter immer neuen *Perspektiven* zu betrachten.

Die faszinierendste *Perspektive* freilich wäre die Verwirklichung des entwickelten Verfahrens in einem realen Produkt, das die in Formeln und Diagrammen in Aussicht gestellten Übertragungsraten Wirklichkeit werden ließe. Die Aufgabe ist also noch nicht vollständig gelöst.

Natürlich sind im Zentrum des *Blickwinkels* immer die Menschen! Deswegen sei hier auch allen Studenten, Praktikanten und Diplomanden nicht nur für die kleinen Bausteine gedankt, die sie zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, sondern vor allem für die Zeit, die wir miteinander verbringen durften. Dasselbe gilt natürlich auch für die Kollegen am Institut, die einem immer wieder klar machen, dass die eigenen Probleme wohl doch nicht immer unbedingt die größten und wichtigsten sind – auch das eine Frage der richtigen *Perspektive*.

---

Eine *Perspektive* ganz eigener Art entwickelt wohl die eigene Familie – bedeutet so eine Arbeit doch ein beträchtliches Maß an Verzicht auf Freizeit und Wochenden. Deswegen soll der Dank an meine Frau Radka und meine Tochter Nicole für die aktive Unterstützung in jeder Phase des Entstehens dieser Arbeit auch dieses Vorwort beschließen.

München, im Mai 2000

*Ro,f Matzner*



## Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die hochratige Digitalsignalübertragung über Kabelbündel, die aus mehreren Adernpaaren bestehen. Charakteristisch sind die erheblichen linearen Verzerrungen aufgrund der mit der Frequenz schnell zunehmenden Dämpfung und ausgeprägtes Übersprechen zwischen den einzelnen Adernpaaren. Typische Vertreter eines solchen Kabelbündels finden sich im Ortsanschlussleitungsnetz.

Nach dem heutigen Stand der Technik werden alle Adernpaare einzeln (oder allenfalls paarweise) als Kanal betrachtet, auf den das Nebensprechen aller anderen als Störung wirkt. Als Alternative zu dieser Single-input single-output (SISO) Betrachtungsweise wird in dieser Arbeit ein das gesamte Kabel mit allen Übertragungssystemen gemeinsam beschreibendes Multiple-input multiple-output (MIMO) Modell entwickelt, in dem die Übersprechbeziehungen und die Korrelationseigenschaften der von außen einwirkenden Störung durch Matrizen beschrieben werden.

Die Kanalkapazität dieses MIMO-Kanals lässt sich durch Transformation in äquivalente SISO-Kanäle mit unabhängigen Störquellen berechnen. Es zeigt sich, dass die Kapazitäten und die optimalen Sendeleistungen dieser äquivalenten SISO-Kanäle untereinander verschieden, in der Summe aber erheblich größer als bei der klassischen SISO-Betrachtungsweise sind.

Übertragungssysteme für einen verzerrenden MIMO-Kanal lassen sich im Zeit- oder Frequenzbereich konstruieren. Als Vertreter für die beiden Gruppen werden mehrdimensionale Entzerrer mit Entscheidungsrückkopplung (Decision feedback equalization (DFE)) sowie mit Discrete multi-tone (DMT) betrachtet. Es lässt sich zeigen, dass beide Konzepte denselben Abstand zur Kanalkapazität wahren wie ein AWGN-Kanal und damit im Sinne einer Entzerrung bzw. Störungsdekoration optimal sind. Ein Vergleich des technischen Aufwands in Form der in Echtzeit nötigen Rechenoperationen zeigt ein schwächeres Wachstum des Aufwands mit der Dimensionalität des MIMO-Systems für das DMT-Verfahren.

Die numerische Auswertung der Kanalkapazität für ein typisches Ortskabel zeigt Kapazitätsgewinne bis zum Fünffachen der Kapazität bei klassischer

SISO-Betrachtung. Der MIMO-Gewinn steigt mit der Dimensionalität des Systems und der Stärke des Übersprechens zwischen den einzelnen Adernpaaren. Entsprechend fällt er bei kürzeren, vielpaarigen Kabeln besonders hoch aus. Die isolierte MIMO-Betrachtung einzelner Subsysteme innerhalb eines größeren Kabels bringt hingegen keine nennenswerten Gewinne.

Die Analyse der Kosten je übertragenem Bit wird getrennt für DFE- und DMT-Implementierung vorgenommen. Während bei DFE-Systemen der Aufwand mit der Dimensionalität explodiert, lassen sich vieldimensionale DMT-Systeme zu vergleichbaren Kosten je Bit realisieren wie SISO-Systeme – bei einer gleichzeitigen Erhöhung der Transinformation um den Faktor fünf.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Grundlegende Fragestellungen . . . . .	1
1.2	Zum Aufbau dieser Arbeit . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Die symmetrische Doppelader im Ortsanschlussleitungs- netz und ihre Bedeutung für die Übertragung heutiger und zukünftiger Dienste</b>	<b>5</b>
2.1	Übersicht über das Ortsanschlussleitungsnetz der Telekom . . . .	7
2.2	Dienste . . . . .	9
2.2.1	Telekommunikationsdienste und Übertragungsverfahren	10
2.2.2	Anforderungsmerkmale eines Telekommunikations- dienstes an das Übertragungsverfahren . . . . .	11
2.2.3	Eingeführte und in der Normung befindliche hochratige Übertragungsverfahren und Dienste . . . . .	12
<b>3</b>	<b>MIMO-Struktur des OAsL-Netzes</b>	<b>19</b>
3.1	Mathematische Schreibweisen, Begriffe und Definitionen . . . .	19
3.1.1	Mathematische Behandlung von MIMO-Systemen . . . .	20
3.1.1.1	Zeitkontinuierliche skalare Signale und Sy- steme . . . . .	20
3.1.1.2	Zeitdiskrete skalare Signale und Systeme . . . .	21
3.1.1.3	MIMO-Systeme . . . . .	23
3.1.1.4	Leistungsgrößen in MIMO-Systemen . . . . .	24
3.1.1.5	Erweiterung auf zeitdiskrete MIMO-Systeme .	27
3.1.2	Zum Begriff des Kanals . . . . .	28
3.1.3	System, Subsystem, Komponente und Kontext . . . . .	29

## Inhaltsverzeichnis

3.2	Modellierung der Übertragungsstrecke . . . . .	32
3.2.1	Nutzsignalpfad . . . . .	32
3.2.2	Klassifizierung von Störungen . . . . .	34
3.2.3	Interne Störungen . . . . .	34
3.2.3.1	Lokales Echo . . . . .	35
3.2.3.2	Nahnebensprechen (NEXT) . . . . .	36
3.2.3.3	Fernnebensprechen (FEXT) . . . . .	36
3.2.4	Externe Störungen . . . . .	37
3.2.4.1	Übersprechen anderer, unbekannter Systeme . . . . .	37
3.2.4.2	Thermisches Rauschen . . . . .	38
3.2.4.3	Impulsstörungen . . . . .	38
3.3	Beschreibung als MIMO-System . . . . .	39
3.3.1	Die Übertragungsstrecke in Matrix-Darstellung . . . . .	39
3.3.2	Eine vereinfachende graphische Darstellungsform . . . . .	40
3.4	Modellierung des Übertragungsverfahrens . . . . .	44
3.4.1	Bandpass- versus äquivalente Tiefpassdarstellung . . . . .	44
3.4.2	Zur Modellierung von Mehrträgersystemen . . . . .	46
3.4.3	Zusammenfassung . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Übertragungssysteme für mehrere Quellen, mehrere Senken und einen MIMO-Kanal</b>	<b>53</b>
4.1	Klassische und MIMO-Sicht des Übertragungsproblems . . . . .	53
4.2	Von der Quelle bis zur diskreten Sendesymbolfolge . . . . .	57
4.3	Von der Entstehung des analogen Sendesignals bis zum Ein- gang . . . . .	61
4.4	Vom Empfängereingang bis zum decodierten Sinkensignal . . . . .	63
4.4.1	Das Empfänger-Frontend . . . . .	65
4.4.2	Das Empfänger-Backend . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Kapazität von MIMO-Kanälen</b>	<b>71</b>
5.1	Zum Begriff: Kapazität und Transinformation . . . . .	71
5.2	Kapazität von SISO-Kanälen . . . . .	71
5.3	Kapazität von MIMO-Kanälen . . . . .	74

## Inhaltsverzeichnis

5.3.1	Einführung . . . . .	74
5.3.2	Anschauliche Ableitung der Kapazität . . . . .	75
5.3.3	Sonderfälle . . . . .	80
5.3.3.1	Kanal ohne Nebensprechen, unkorrelierte Störung . . . . .	80
5.3.3.2	Vollständig symmetrische Systeme . . . . .	81
5.4	Bemessung der Sendespektren . . . . .	82
5.5	Der MIMO-Gewinn . . . . .	84
5.5.1	Maximale Transinformation im SISO-Kontext . . . . .	84
5.5.2	SISO-Verlust . . . . .	86
5.5.3	Allgemeiner kontextbezogener Verlust . . . . .	88
5.6	Korrelationseigenschaften der Störung . . . . .	89
5.6.1	Räumlich unkorrelierte Störung . . . . .	89
5.6.2	Räumlich vollständig korrelierte Störung . . . . .	90
5.6.3	Mittlerer Korrelationskoeffizient . . . . .	90
5.7	Zusammenfassung . . . . .	90
<b>6</b>	<b>MIMO-Übertragungssysteme im Zeitbereich</b>	<b>93</b>
6.1	MIMO-Übertragungssysteme mit DFE-Empfänger . . . . .	94
6.1.1	Frontend und lineares Backend . . . . .	94
6.1.2	Der rückgekoppelte Teil des Backends . . . . .	97
6.1.3	Signalstörabstand und Kanalkapazität . . . . .	99
6.2	Aufwand . . . . .	102
6.2.1	Definition des Aufwands . . . . .	102
6.2.2	DFE-Systeme für das Basisband . . . . .	103
<b>7</b>	<b>MIMO-Übertragungssysteme im Frequenzbereich</b>	<b>105</b>
7.1	Discrete multi-tone Modulation . . . . .	105
7.1.1	Grundsätzlicher Aufbau eines DMT-Systems . . . . .	107
7.1.2	Periodizität und Cyclic Prefix . . . . .	109
7.2	SISO-DMT-Systeme und die Kapazität . . . . .	110
7.3	MIMO-DMT-Systeme . . . . .	110
7.3.1	Kanalmodell . . . . .	111

## *Inhaltsverzeichnis*

7.3.2	Empfängerkonzept . . . . .	111
7.4	Realisierungsaufwand . . . . .	113
7.4.1	Aufwand eines SISO-DMT-Systems . . . . .	113
7.4.2	Aufwand eines MIMO-DMT-Systems . . . . .	115
<b>8</b>	<b>Bewertung an einem Beispiel</b>	<b>117</b>
8.1	Die Szenarien . . . . .	117
8.1.1	Kabelgrößen . . . . .	117
8.1.2	Beschaltung . . . . .	118
8.1.3	Kontext . . . . .	118
8.1.3.1	MIMO-Kontext . . . . .	118
8.1.3.2	SISO-Kontext . . . . .	119
8.1.3.3	Eingeschränkte Kontexte . . . . .	119
8.2	Sendespektren . . . . .	122
8.3	Ergebnisse zur Kapazität . . . . .	125
8.4	Bewertung des technischen Aufwands . . . . .	128
8.4.1	Vergleichskriterien . . . . .	128
8.4.2	Ergebnisse . . . . .	129
<b>A</b>	<b>Verzeichnis der Abkürzungen</b>	<b>135</b>
<b>B</b>	<b>Verzeichnis der mathematischen Schreibweisen und Symbole</b>	<b>139</b>
B.1	Schreibweisen . . . . .	139
B.2	Symbole und ihre Bedeutung . . . . .	140
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>145</b>

# 1 Einleitung

Das Ortsanschlussleitungsnetz der Telekom besteht im Wesentlichen aus viel-paarigen Kabeln. Der zunehmenden Nutzung für hochratige Dienste stehen die mit der Frequenz stark zunehmende Dämpfung und das ebenfalls zunehmende Übersprechen zwischen einzelnen Adernpaaren entgegen. Bislang wurden zu-meist einzelne Adermpaare als Träger des Nutzsignals betrachtet, während die auf allen anderen Adermpaaren geführten Signale durch die Nebensprechüber-tragung als stochastische Störung aufgefasst wurden. Erste Ansätze zur gemein-samen Betrachtung von zwei oder drei Adermpaaren im Rahmen von HDSL-Systemen und die Ausnutzung korrelierter Störungen brachten keine nennens-werten Erfolge [FHK94].

## 1.1 Grundlegende Fragestellungen

Daraus ergibt sich die Frage, ob die gemeinsame Betrachtung mehrerer oder – im Extremfall – aller Adermpaare als *ein vieldimensionales System* prinzipiell keinen hohen Gewinn erwarten lässt, oder ob vielmehr die Frage der Dimensio-nalität hier eine Rolle spielt. Im Einzelnen sind folgende Fragen zu beantworten:

- Wie lässt sich ein Kabelbündel in geeigneter Form als vieldimensionales System beschreiben?
- Wie verhält es sich mit der Kapazität bei ganzheitlicher Betrachtung im Vergleich zur heute üblichen getrennten Betrachtung jeden einzelnen Adermpaares?
- Welchen Sender/Empfängerkonzepte realisieren die vieldimensionale Betrachtungsweise?

---

## 1 Einleitung

- Wie verhalten sich diese Realisierungskonzepte in Bezug auf die Kanalkapazität?
- Wie verhalten sich diese Realisierungskonzepte hinsichtlich des technischen Aufwands?
- Welche Kapazitätsgewinne und welche Kosten für die Realisierung ergeben sich an einem konkreten Beispiel?

Das Ergebnis der Antworten auf diese Fragen, die in den nachfolgenden Kapitel zu geben versucht werden, ist letztlich die Gegenüberstellung des erreichbaren Zugewinns an Übertragungsrate und des dafür erforderlichen Aufwands.

## 1.2 Zum Aufbau dieser Arbeit

Der Aufbau dieser Arbeit folgt im wesentlichen der logischen Struktur Aufgabenstellung.

### **Die symmetrische Doppelader im Ortsanschlußleitungsnetz . . .**

Der Ausgangspunkt – eine Beschreibung der „physikalischen“ Eigenschaften des Ortsanschlußleitungsnetzes, seiner Topologie und elektrischen Eigenschaften – dient der Klärung der Voraussetzungen für den Einsatz von Übertragungssystemen. Diese Voraussetzungen werden nachfolgend als gegeben und unveränderbar angesehen.

**MIMO-Struktur des OAsL-Netzes** Aus systemtheoretischer Sicht ist ein Kabelbündel im Ortsanschlußleitungsnetz (OAsL-Netz) ein Multiple-input multiple-output (MIMO)-System, dessen Ein- bzw. Ausgänge meistens zumindest gruppenweise auch räumlich konzentriert sind. Schwerpunkt dieses Kapitels ist folgerichtig die Darstellung eines OAsL-Kabelbündels als MIMO-System.

**Übertragungssysteme für den MIMO-Kanal** Die Betrachtungsweise des Kabelbündels als MIMO-Kanal erfordert natürlich die Erweiterung der in der Literatur üblichen Single-input single-output (SISO)-Beschreibung von Übertragungssystemen. In diesem Kapitel wird im wesentlichen der dafür notwendige Formalismus eingeführt.



## 1.2 Zum Aufbau dieser Arbeit

**Kapazität von MIMO-Kanälen** Die Kapazität von MIMO-Kanälen im Sinne dieser Arbeit wurde in der Literatur schon verschiedentlich behandelt. Aufgabe dieses Kapitels ist also nicht der mathematische Beweis einer Kapazitätsformel, sondern deren anschauliche Herleitung und Interpretation mit dem Ziel, daraus Erkenntnisse für die richtige Dimensionierung eines MIMO-Übertragungssystems zu gewinnen.

**MIMO-Übertragungssysteme im Zeitbereich** Die Realisierung eines MIMO-Übertragungssystems mit einer Entzerrung des Kanals im Zeitbereich führt nahezu zwangsläufig zu entscheidungsrückgekoppelten Empfängern. Neben dem Nachweis, dass diese im Sinne der Kapazität optimal sind, ist besonders der erforderliche Aufwand für die Realisierung von Interesse.

**MIMO-Übertragungssysteme im Frequenzbereich** Vor allem die ADSL-Hype der letzten Jahre hat Verfahren zur Entzerrung im Frequenzbereich durch Anwendung orthogonaler Mehrträger-Modulation gerade im Ortsanschlussleitungsnetz etabliert. In diesem Kapitel wird die generelle Struktur eines Frequenzbereichs-Verfahrens für MIMO-Kanäle entwickelt. Die Korrespondenz zwischen der Struktur des Übertragungssystems und den Überlegungen zur Berechnung der Kanalkapazität ist hier besonders deutlich. Interessant ist der im Vergleich zu Zeitbereichsverfahren anders geartete Anstieg des Systemaufwands mit der Dimensionalität des MIMO-Systems.

**Bewertung an einem Beispiel** Am Beispiel eines typischen Ortskabels wird zunächst der Kapazitätsgewinn durch gemeinsame Betrachtung aller Adernpaare im Sinne des MIMO-Gedankens untersucht. Für ein typisches Szenario liefert dann der Vergleich des Aufwands von SISO-Systemen und MIMO-Systemen, jeweils im Zeit- und Frequenzbereich, überraschende Ergebnisse.

---

## *1 Einleitung*

## 2 Die symmetrische Doppelader im Ortsanschlussleitungsnetz und ihre Bedeutung für die Übertragung heutiger und zukünftiger Dienste

Die Übertragung von Nachrichten benötigt zwei, grundsätzlich beschränkte Ressourcen: (elektrische) *Leistung* und *Bandbreite*. Beide Ressourcen sind prinzipiell gegeneinander austauschbar und dienen der Überwindung des gemeinsamen Einflusses von *Kanaldämpfung* und *Störung*. Da (in den meisten Fällen) die Störung am Empfänger wirksam ist (z.B. thermisches Rauschen am Empfängereingangswiderstand, Nebensprechen durch Sendeverstärker benachbarter Systeme), hat die Kanaldämpfung einen die Störung verstärkenden Einfluss. Dem wiederum kann durch erhöhten Einsatz von Ressourcen, also Erhöhung der Leistung oder Vergrößerung der Bandbreite, begegnet werden. Entgegen steht dem, dass einerseits die Leistung aus Gründen des Energieverbrauchs oder der ausgesendeten Störungen möglichst niedrig gehalten werden sollte, andererseits die nutzbare Bandbreite häufig durch Kanaleigenschaften (z.B. Übertrager, Tiefpässe) oder willkürliche Festlegungen (Funkentstör-Vorschriften, Frequenzplan) begrenzt ist. Aus diesem Konflikt ergeben sich unmittelbar folgende Forderungen an Übertragungssysteme:

- Die erforderliche Energie zur Übertragung einer Informationseinheit sollte minimal sein.
- Der Kanal sollte die geringstmögliche Dämpfung aufweisen.
- Die nutzbare Bandbreite des Kanals sollte möglichst groß sein.

---

## 2 Die symmetrische Doppelader im Ortsanschlussleitungsnetz . . .

Die zur Übertragung einer Informationseinheit erforderliche Energie ist durch die Informationstheorie nach unten begrenzt. Dieser Grenze kann man sich durch Einsatz geeigneter Übertragungsverfahren und Methoden der Kanalcodierung annähern. Inwieweit dies möglich ist, soll Gegenstand der nachfolgenden Kapitel sein. Dagegen hängen die nutzbare Bandbreite und die Kanaldämpfung eng mit der Wahl des Übertragungsmediums zusammen. Unter den genannten Gesichtspunkten ist die Glasfaser die erste Wahl. Die Dämpfung liegt mit einigen dB pro km um Größenordnungen unter den mit Kupferleitern erreichbaren Werten, und die nutzbare Bandbreite ist aufgrund der nicht vorhandenen Aussendung von Störstrahlung nahezu unbegrenzt.

Es sind also ausschließlich wirtschaftliche Gründe, die auch heute noch die Nutzung von Kupferleitern attraktiv erscheinen lassen. Unter Nutzung ist hierbei weniger die Neuverlegung, als vielmehr die Weiterverwendung bestehender Leitungen für neue Dienste zu verstehen. Überall dort, wo Kupferleitungen bereits existieren, stehen die Kosten moderner Übertragungseinrichtungen für eben diese Kupferleitungen gegen die entsprechenden Kosten für Glasfasern plus deren Verlegekosten. Es ist offensichtlich, dass die Glasfaser dort im Vorteil ist, wo sich viele zahlende Kunden die Verlegekosten teilen, also (in dieser Reihenfolge) im Fernnetz, im Ortsverbindungsleitungsnetz und, in naher Zukunft, auf dem Weg von der Ortsvermittlungsstelle bis zum Kabelverzweiger. Dort jedoch, wo nur ein Kunde die Leitung nutzt, ist die Neuverlegung von Glasfaser im Vergleich zur Nutzung des vorhandenen Kupfers nicht rentabel. Das betrifft zunächst das gesamte Ortsanschlussleitungsnetz, insbesondere aber die Verbindung vom Kabelverzweiger bis zum Teilnehmer.

Entsprechend dieser Zielrichtung ist dieses Kapitel dem Ortsanschlussleitungsnetz der Telekom gewidmet, dessen topologische Struktur im folgenden Abschnitt kurz dargestellt wird. Danach verlassen wir vorübergehend die unteren Ebenen des OSI-Schichtenmodells, um heutige und zukünftige Telekommunikationsdienste zu betrachten, die über das Ortsanschlussleitungsnetz übertragen werden bzw. werden könnten.

## 2.1 Übersicht über das Ortsanschlussleitungsnetz der Telekom

Das Ortsanschlussleitungsnetz ist grundsätzlich in Sterntopologie ausgeführt, d.h. für jeden Teilnehmer ist (mindestens) eine Doppelader zur Ortsvermittlungsstelle geschaltet<sup>1</sup>. Von der Ortsvermittlungsstelle ausgehend werden die Doppeladern geographisch benachbarter Teilnehmer zunächst in Kabelbündeln geführt. Ein Teil der Kabelbündel wird direkt bis zu den Endverzweigern der Teilnehmer geführt, während der andere Teil (das sog. Hauptkabelnetz) in Kabelverzweigern endet. Von dort werden über das Verzweigungskabelnetz die Teilnehmer versorgt.

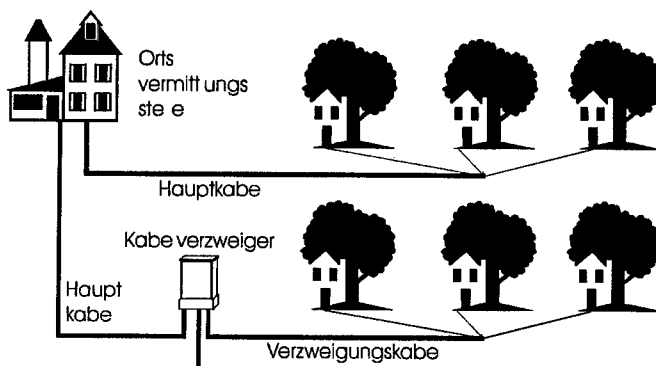


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung des Ortsanschlussleitungsnetzes. Teils werden die Teilnehmer direkt versorgt, teils wird die Ortsanschlussleitung durch einen Kabelverzweiger in Hauptkabel und Verzweigungskabel unterteilt.

Soll einem Teilnehmer ein hochratiger digitaler Dienst zur Verfügung gestellt

<sup>1</sup> Ausnahmen von dieser Regel sind dort gegeben, wo aufgrund zu weniger freier Doppeladern mehrere Teilnehmeranschlüsse mit PCM-2-Systemen, PCM-4-Systemen oder Anschlussleitungsmultiplexern über eine einzige Doppelader geführt werden. Solche Anschlüsse können mit modernen Diensten wie HDSL, ADSL oder VDSL aus unmittelbar einsichtigen Gründen prinzipiell nicht versorgt werden.

## 2 Die symmetrische Doppelader im Ortsanschlussleitungsnetz . . .

werden, so ist zu prüfen, ob die Kapazität der Verbindung zur Ortsvermittlungsstelle für die angestrebte Bitrate ausreicht. Die Antwort wird vor allem durch

- den Typ der eingesetzten Kabel,
- deren Länge und
- die eingestreuten Störungen

bestimmt. Der Einfluss dieser Faktoren und ihre Ausprägung im Netz der Telekom werden im weiteren Verlauf noch ausführlicher untersucht. An dieser Stelle soll eine kurze Übersicht über die wichtigsten Zahlen genügen:

**Kabeltyp.** Überwiegend sind Doppeladern mit 0,4 mm Aderndurchmesser, bei längeren Anschlussleitungen auch mit 0,6 mm Aderndurchmesser zu finden. Neu- bzw. Ersatzverlegungen werden mit 0,35 mm oder 0,635 mm starken Adern durchgeführt.

**Kabellänge.** Die mittlere Hauptkabellänge beträgt im Bereich der alten Bundesländer 1,7 km, während die mittlere Verzweigungskabellänge bei 300 m liegt. Sollen 90 % aller Teilnehmer erreicht werden, ist dafür eine Entfernung von 3,7 km (Hauptkabel) bzw. 500 m (Verzweigungskabel) zu überbrücken [We193].

**Störungen** werden neben dem stets vorhandenen thermischen Rauschen durch Nebensprechen von anderen, in demselben Kabelbündel geführten Doppeladern verursacht. Hauptkabel bestehen im Mittel aus 490 Doppeladern, während durchschnittlich 30 Doppeladern zu einem Verzweigungskabel zusammengefaßt sind [We193].

Dem Kabelverzweiger kommt dann besondere Bedeutung zu, wenn die gesamte Distanz von der Ortsvermittlungsstelle bis zum Teilnehmer bei der geforderten Bitrate nicht mehr mit den bestehenden Leitungen überbrückt werden kann. In diesem Falle können die Anschlusskosten erheblich gesenkt werden, wenn anstelle einer unmittelbaren Neuverkabelung der Haushalte mit Glasfaser lediglich der Kabelverzweiger durch einen breitbandigen Glasfaseranschluss bedient wird, vgl. Bild 2.2. Diese, oft unpräzise als *Fiber to the Curb (FTTC)* bezeichnete Technik ermöglicht es, die am schwierigsten gegen Glasfaser zu tauschenden

## 2.2 Dienste

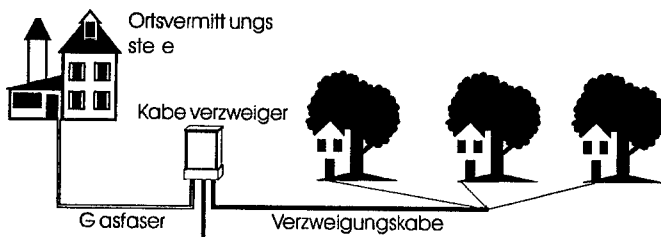


Abbildung 2.2: Die Kombination aus Glasfaser bis zum Kabelverzweiger und herkömmlichen Doppeladern von dort bis zum Teilnehmer ermöglicht die kostengünstige Einführung neuer, breitbandiger Dienste.

Verzweigungskabel auch für breitbandige Dienste zu nutzen. Durch die Versorgung des Kabelverzweigers mit Glasfaser beträgt die mit Kupfer zu überbrückende Restlänge in 90 % der Fälle weniger als 500 m. Wie noch zu zeigen sein wird, ermöglichen diese kurzen Kabellängen die Übertragung von Bitraten bis in die Größenordnung von 100 Mbit/s.

Die Verwendung des Akronyms FTTC in der Literatur ist unscharf, da nicht ganz klar ist, wo genau eigentlich die „Bordsteinkante“ (*curb*) ist. Um Mißverständnissen vorzubeugen, werden wir ein hybrides System mit Glasfaserübertragung bis zum Kabelverzweiger (*cabinet*) künftig als *Fiber to the Cabinet (FTTCab)* bezeichnen.

## 2.2 Dienste

Dieser Abschnitt soll eine Übersicht über die Anforderungen heutiger und zukünftiger Telekommunikationsdienste an die Übertragungstechnik geben. Dabei ist es zunächst erforderlich, einigen bisher bereits benutzten Begriffen eine präzisere Bedeutung zu geben.

### 2.2.1 Telekommunikationsdienste und Übertragungsverfahren

An dieser Stelle ist es angezeigt, die Begriffe „Telekommunikationsdienst“, im Folgenden kurz: *Dienst*, und „Übertragungsverfahren“ klar zu fassen.

**Definition 2.1.** Ein Dienst ist eine dem Teilnehmer zur Verfügung gestellte Möglichkeit zur Übertragung von Information mit definierter teilnehmerseitiger Schnittstelle. Er spezifiziert Art, Struktur und ggf. Bedeutung der zu übertragenden Information, nicht jedoch das Verfahren der Übertragung.

**Definition 2.2.** Ein Übertragungsverfahren ist die technische Beschreibung, wie ein Bitstrom über einen bestimmten Kanal zu übertragen ist. Es spezifiziert Sender und Empfänger, Codierung und Decodierung, nicht jedoch Art, Struktur oder Bedeutung der übertragenen Daten.

Aus diesen Definitionen wird klar, dass ein zunächst abstrakt spezifizierter Dienst ein passendes Übertragungsverfahren erfordert, während umgekehrt durch ein gegebenes Übertragungsverfahren alle Dienste übertragen werden können, deren Anforderungsmerkmale es erfüllt. Ein Beispiel soll dies verdeutlichen.

**Beispiel 2.1.** Der Anschlussleitungsmultiplexer (AslMx) wird eingesetzt, um bei nicht ausreichender Verfügbarkeit von Doppeladern die Gespräche mehrerer, z.B. 30, Teilnehmer über zwei Doppeladern zu übertragen. Dazu werden die analogen Teilnehmerkanäle digitalisiert und durch Multiplex-Technik zu einem Bitstrom von 2,048 Mbit/s zusammengefaßt. Es handelt sich also um ein hochratiges digitales *Übertragungsverfahren*. Ein neuer *Dienst* wird dadurch hingegen nicht begründet, da dem Teilnehmer nach wie vor lediglich ein analoger Fernsprechanschluss zur Verfügung steht.

Ob ein bestimmtes Übertragungsverfahren zur Übertragung eines Dienstes geeignet ist, hängt davon ab, ob es dessen *Anforderungsmerkmalen* genügt.



### 2.2.2 Anforderungsmerkmale eines Telekommunikationsdienstes an das Übertragungsverfahren

Das offensichtlichste Anforderungsmerkmal eines Dienstes ist die Bitrate. Hier müssen wir unterscheiden zwischen der *Downstream-Bitrate*  $R_{bDS}$ , die den Datenstrom von der Ortsvermittlungsstelle zum Teilnehmer beschreibt, und der *Upstream-Bitrate*  $R_{bUS}$  für die entgegengesetzte Richtung. Das Verhältnis von Upstream- zu Downstream-Bitrate bezeichnen wir als *Symmetriefaktor*

$$q_{UD} = R_{bUS}/R_{bDS}. \quad (2.1)$$

Im allgemeinen wird der Symmetriefaktor kleiner oder höchstens gleich eins sein.

Von erheblicher Bedeutung ist auch die maximal tolerierbare *Laufzeit*  $\tau_{b,max}$ , die während der Übertragung eines Bits verstreichen darf. Da diese Laufzeit vor allem bei interaktiven Diensten eine Rolle spielt, d.h. dann, wenn der Teilnehmer auf eine Reaktion wartet, gehen wir davon aus, dass  $\tau_{b,max}$  in Upstream- und Downstream-Richtung jeweils denselben Wert hat. Für nicht interaktive Dienste, z.B. die bloße Verteilung eines Fernsehprogramms, ist die Laufzeit unter technischen Gesichtspunkten unwesentlich.

Besonderes Gewicht kommt der maximal zulässigen Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $P_{b,max}$  zu. Sie mag sich zwischen etwa  $10^{-3}$  für Sprachübertragung bis hin zu  $10^{-14}$  für die Übertragung quellencodierter Bildsequenzen bewegen.

Bei der Konzeption eines Übertragungssystems für mehrere, sich gegenseitig beeinflussende Teilnehmer kommen weitere Gesichtspunkte hinzu, z.B. ob die Verfügbarkeit eines Dienstes dem Teilnehmer zu jedem beliebigen Zeitpunkt garantiert werden muß (was z.B. beim Fernsprehdienst gegeben sein dürfte), oder ob eine (i.a. kurzfristige) Zurückweisung des Teilnehmers akzeptabel ist (z.B. beim Datei-Transfer).

### 2.2.3 Eingeführte und in der Normung befindliche hochratige Übertragungsverfahren und Dienste

Dieser Abschnitt soll einen Überblick über die aktuellen Dienste und Übertragungsverfahren im Ortsanschlussleitungsnetz geben. Dabei beschränken wir uns auf *hochratige* Dienste, also Dienste, die dem Teilnehmer mehr als 1 Mbit/s Übertragungskapazität bieten, und die zugehörigen Übertragungsverfahren. Nicht im Mittelpunkt des Interesses stehen hierbei hochratige Übertragungsverfahren, die lediglich der Multiplexübertragung vieler analoger Sprachkanäle oder niederratiger digitaler Kanäle über zwei Doppeladern dienen, wie PCM30 oder der Anschlussleitungsmultiplexer.

#### ISDN Primärmultiplexanschluss (PMxAs)

Der seit 1988 eingesetzte ISDN-Primärmultiplexanschluss dient vorwiegend dem Anschluss digitaler Nebenstellenanlagen. Die Gesamtbitrate von 2,048 Mbit/s teilen sich im Standardmodell 30 Nutzkanäle ( $B$ ) zu je 64 kbit/s (für Sprache oder Daten), ein Signalisierungskanal ( $D_{64}$ ) mit ebenfalls 64 kbit/s, sowie ein Kanal für Synchronisations- und Betriebszwecke. Darüberhinaus sind Kanäle mit höherer Bitrate standardisiert, so z.B.  $H_0$  mit 384 kbit/s und  $H_{12}$  mit 1920 kbit/s. Als Anwendungen für diese Kanäle kommen vor allem Videokonferenzen in Betracht [Kah86].

Aufgrund des veralteten und schlecht an die Kanaleigenschaften angepaßten Übertragungsverfahrens werden alle 1,0 km bis 1,7 km Zwischenregeneratoren benötigt [Wel93]. Die schlechte Auslegung des Übertragungsverfahrens ist unmittelbar aus dem Leistungsspektrum des verwendeten HDB3-Leitungscodes ersichtlich, vgl. Bild 2.3. Der bei weitem größte Anteil der Sendeleistung liegt in der Nähe der Nyquistfrequenz, also in einem Frequenzbereich, in dem erstens die Dämpfung des Übertragungsmediums bereits sehr hoch und zweitens die Nebensprechdämpfung bereits relativ niedrig ist.

#### High-bit rate Digital Subscriber Line (HDSL)

HDSL spezifiziert ein reines Übertragungsverfahren für 2,048 Mbit/s (Europa) bzw. 1,544 Mbit/s (USA). Durch die Anwendung modernster Modulationsver-

## 2.2 Dienste

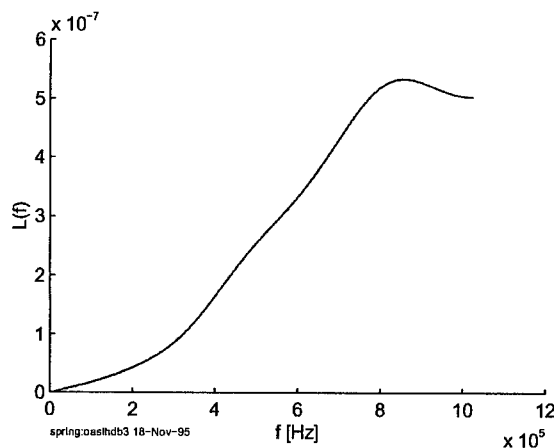


Abbildung 2.3: Leistungsspektrum des HDB3-Codes bis zur Nyquistfrequenz bei einer Schrittgeschwindigkeit von 1024 kBd.

fahren (Discrete multi-tone (DMT) oder Carrierless amplitude/phase modulation (CAP)) sind Reichweiten von 3–4 km bei Nutzung einer einzigen Doppelader bzw. bis etwa 6 km bei gleichzeitiger Nutzung von drei Doppeladern überbrückbar.

Das schematische Leistungsspektrum eines HDSL-Senders in CAP-Technik zeigt Bild 2.4. Im Vergleich zum Leistungsspektrum eines PMxAs (Bild 2.3) fällt sofort die wesentlich stärkere Konzentration der Sendeleistung bei niedrigen Frequenzen auf. Neben einem besseren Empfänger und einer an den Kanal angepassten Modulation liegt darin ein Grund für die im Vergleich zum PMxAs höhere Reichweite.

HDSL-Geräte in DMT-Technik sind in der Lage, ihr Sendeleistungsspektrum an Kanaleigenschaften und Störumgebung anzupassen. Damit kann ein einzelnes System in einer festen Störumgebung durch Anwendung des „Water Pouring“-Prinzips die Transinformation optimieren [Gal68]. Ungeklärt ist bisher die Frage, wie sich mehrere, sich gegenseitig störende, Systeme verhalten. In diesem Fall ist die Störumgebung für ein betrachtetes System nicht fest, sondern abhän-

## 2 Die symmetrische Doppelader im Ortsanschlussleitungsnetz . . .

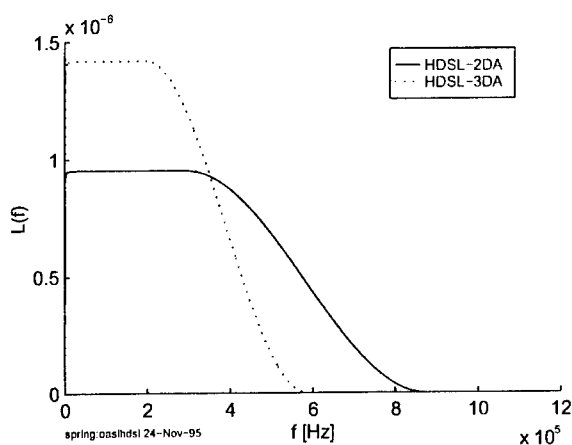


Abbildung 2.4: Normierte Leistungsspektren der Sendesignale von HDSL-Systemen (CAP-Technik) in Zweifach- (HDSL-2DA) bzw. Dreifach-Duplex-Technik (HDSL-3DA).

gig von der Reaktion der anderen Systeme auf das Sendeleistungsspektrum des betrachteten Systems. Erste Untersuchungen lassen vermuten, dass in diesem Fall die durch lokales Water-Pouring erreichbare Transinformation weit unterhalb des maximal Möglichen liegt [Aif95].

### Asymmetric Digital Subscriber Line (ADSL)

ADSL spezifiziert wie High bit rate digital subscriber lines (HDSL) ein Übertragungsverfahren, das allerdings speziell auf die Versorgung von Privathaushalten mit hochratigen, interaktiv zu beeinflussenden Diensten ausgerichtet ist. Im ADSL-Forum [ads95] zusammengeschlossene Dienste-Anbieter<sup>2</sup>, Netzbe-

<sup>2</sup>Nicht Gegenstand dieser Arbeit, aber immerhin bemerkenswert ist, dass am amerikanisch dominierten ADSL-Forum auch einige europäische Vertreter (u. a. Niederländische Post und Telekom, British Telecom, Ericsson), jedoch weder die Deutsche Telekom AG noch ein deutscher Hersteller beteiligt sind.

## 2.2 Dienste

treiber und Hersteller haben die Definition eines ADSL-Standards beim US-amerikanischen Standardisierungsgremium American National Standards Institute (ANSI) vorangetrieben [ANS93].

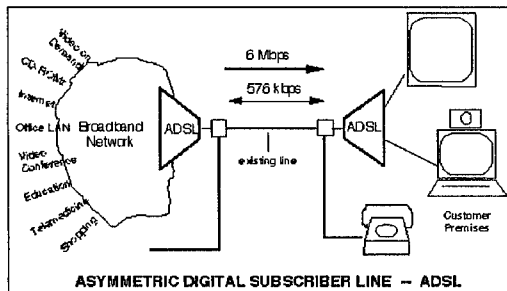


Abbildung 2.5: Der ADSL-Standard und mögliche Anwendungen aus der Sicht des ADSL-Forums (entnommen aus [ads95])

Entsprechend dieser Zielsetzung sieht der ADSL-Standard einen hochratigen Kanal vom Anbieter zum Teilnehmer (*engl.*: downstream) und einen niederratigen Kanal in der entgegengesetzten Richtung (*engl.*: upstream) vor. Das der World Wide Web (WWW)-Page des ADSL-Forums entnommene Bild 2.5 verdeutlicht sowohl die angestrebten Einsatzgebiete als auch einige technische Daten. Neben den in Bild 2.5 angegebenen Übertragungsraten sind für den Downstream auch niedrigere, bis hinab zu 1,544 Mbit/s in den USA bzw. 2,048 Mbit/s in Europa, vorgesehen. Im Upstream werden zwischen 16 kbit/s und 640 kbit/s angeboten werden. Der Symmetriefaktor (vgl. Abschnitt 2.2.2 auf Seite 11) liegt also zwischen  $q_{UD} = 0,01$  und  $q_{UD} = 0,1$ .

Upstream und Downstream werden bei ADSL in Getrenntlage übertragen (d. h. nutzen verschiedene, disjunkte Frequenzbereiche), mit dem Upstream im Bereich bis etwa 150 kHz und dem Downstream im Bereich von 150 kHz bis maximal 1,1 MHz. Damit ergeben sich die in Bild 2.6 skizzierten Sendespektren.

Die Darstellung mit logarithmischer Frequenzachse zeigt, dass der Downstream nur knapp die zehnfache Bandbreite wie der Upstream einnimmt. Da

## 2 Die symmetrische Doppelader im Ortsanschlussleitungsnetz . . .

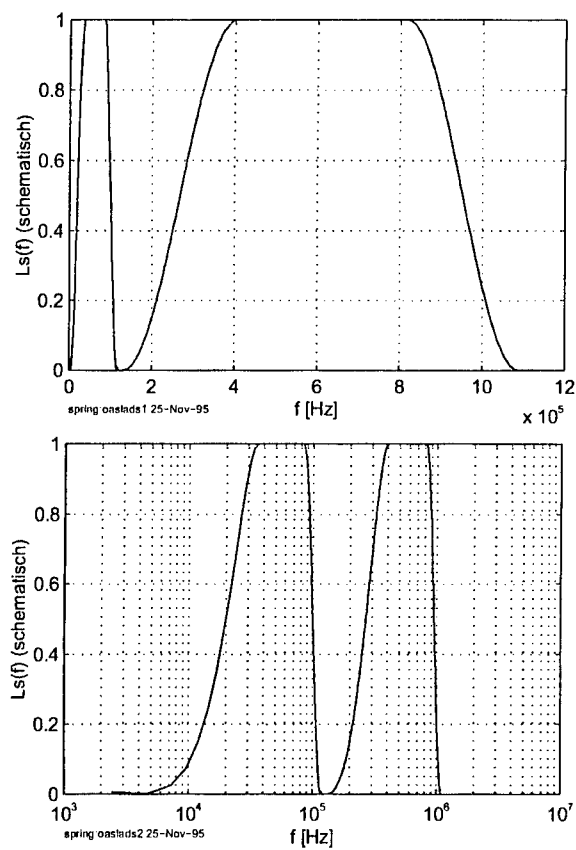


Abbildung 2.6: Schematische Darstellung der jeweiligen Sendeleistungsspektren von Up- und Downstream eines typischen ADSL-Systems, unten mit logarithmischer Frequenzachse.

## 2.2 Dienste

1. bei fast allen Konfigurationen der Symmetriefaktor  $q_{UD}$  deutlich kleiner als 0,1 ist, und
2. die Kapazität gleich großer Teilbänder mit niedrigerer Mittenfrequenz sehr stark zunimmt,

läßt sich aus Bild 2.6 unmittelbar folgern, dass die Kapazität des Gesamtsystems ausschließlich durch den hochratigen Downstream erschöpft wird, während der Upstream erhebliche Reserven aufweisen dürfte. Wir werden diese Aussage später quantifizieren und Verbesserungsmöglichkeiten diskutieren.

### **Very high rate Digital Subscriber Line (VDSL)**

Von seiten verschiedener Institutionen (ANSI, European Telecommunications Standards Institute (ETSI), Digital Audio Video Council (DAVIC), Asynchronous Transfer Mode (ATM)-Forum und Asymmetric digital subscriber lines (ADSL)-Forum) wird die Standardisierung von Verfahren für wesentlich höhere Bitraten ( $> 20$  Mbit/s) vorangetrieben. Theoretisch bringt dies keine neuen Erkenntnisse, aufgrund der hohen Datenrate und der damit erforderlichen Verarbeitungsgeschwindigkeit in Sendern und Empfängern gewinnen hier jedoch einfache, aufwandsgünstige Verfahren wieder an Bedeutung.

---

2 Die symmetrische Doppelader im Ortsanschlussleitungsnetz . . .



---

## 3 MIMO-Struktur des OAsL-Netzes

Im Laufe dieses Kapitels wird ein Formalismus entwickelt, der eine einheitliche systemtheoretische Beschreibung der bisher erwähnten Übertragungsverfahren (PAM, QAM, CAP, DMT) in der typischen Umgebung des Ortsanschlussleitzungsnetzes zulässt. Dazu beschäftigen wir uns zunächst (Abschnitt 3.1) mit der mathematischen Beschreibung linearer, zeitinvarianter MIMO-Systeme. Die im Ortsanschlussleitzungsnetz anzutreffenden vielpaarigen Kabel sind dem Wesen nach natürlich MIMO-Kanäle, deren Übertragungs- und Störverhalten durch geradlinige Anwendung der Theorie der MIMO-Systeme beschrieben werden kann (Abschnitt 3.2). Während die numerische Behandlung auch großer Matrizen heute kein wesentliches Problem mehr mit sich bringt, gelangt die graphische Darstellung umfangreicher MIMO-Systeme mit allen Übertragungsfunktionen schnell an ihre Grenzen. Aus diesem Grunde wird eine vereinfachende Darstellung linearer MIMO-Systeme durch gerichtete Graphen eingeführt (Abschnitt 3.3.2). Der letzte Teil dieses Kapitels (Abschnitt 3.4) beschäftigt sich mit der Modellierung des Übertragungsverfahrens. Eine Analyse der Unzulänglichkeiten der komplexen äquivalenten Tiefpassdarstellung von Bandpasssystemen mit zwei orthogonalen Trägern, und der Wunsch nach Einbeziehung der Mehrträgersysteme führt ebenfalls zu einer Beschreibung als MIMO-System, wobei jedem Träger (jeder Dimension) ein Ein-Ausgangspaar zugeordnet wird.

### 3.1 Mathematische Schreibweisen, Begriffe und Definitionen

Das Ortsanschlussleitzungsnetz ist geprägt durch Kabelbündel, bestehend aus einer großen Anzahl symmetrischer Adernpaare. Mit der zunehmenden Verbreitung digitaler Dienste jenseits des ISDN-Basisanschlusses werden im Mittel

### 3 MIMO-Struktur des OAsL-Netzes

immer mehr Doppeladern zu Trägern hochratiger digitaler Signale, und damit zu potenziellen Störern neu hinzukommender Übertragungssysteme. Dem Wesen nach ist solch ein Kabel ein System mit einer hohen Anzahl von Ein- und Ausgängen, ein MIMO-System.

Da das Ziel unserer Betrachtungen stets ein einzelnes zu untersuchendes System im Umfeld der Vielfalt von Störungen innerhalb eines Kabelbündels ist, mag man argumentieren, dass von allen Ausgängen des Kabelbündels doch nur ein einziger, nämlich der jenes Adernpaares, welches unser betrachtetes System nutzt, interessiert – und somit eigentlich ein Multiple-input single-output (MISO)-System vorliegt. Dem ist natürlich zunächst entgegenzuhalten, dass eine Vielzahl von Systemen mehrere Adernpaare zur Übertragung einer Nachricht nutzt (z.B. Mehrfach-Duplex-HDSL). Darüberhinaus werden wir im Laufe dieses Kapitels sowohl für die klassische zweidimensionale Übertragung mit orthogonalen Trägern als auch für beliebige Mehrträgerverfahren eine Darstellung als (echte) MIMO-Systeme entwickeln.

Vor diesem Hintergrund ist es zu rechtfertigen, das mathematische Kalkül für echte MIMO-Systeme aufzubauen, selbst wenn im Einzelfall nur einige der vielen Ausgänge von Interesse sind.

#### 3.1.1 Mathematische Behandlung von MIMO-Systemen

##### 3.1.1.1 Zeitkontinuierliche skalare Signale und Systeme

Bild 3.1 zeigt die wohlbekannte Darstellung eines zeitkontinuierlichen Linear time-invariant (LTI)-Single-input single-output (SISO)-Systems.



Abbildung 3.1: Zeitkontinuierliches LTI-System mit Übertragungsfunktion  $H(f)$ , Eingangssignal  $x(t)$  und Ausgangssignal  $y(t)$

### 3.1 Mathematische Schreibweisen, Begriffe und Definitionen

Von Interesse ist die Ein-Ausgangsbeziehung, die im Zeitbereich

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (3.1a)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} x(t) * h(t) \quad (3.1b)$$

lautet, im Frequenzbereich

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (3.2)$$

Grundsätzlich bezeichnen wir Zeitsignale mit lateinischen Kleinbuchstaben, die zugehörigen Fourier-Transformierten mit den entsprechenden Großbuchstaben:

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad (3.3a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi ft}dt \quad (3.3b)$$

#### 3.1.1.2 Zeitdiskrete skalare Signale und Systeme

Ein Signal von der Form

$$x(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} x_{\mu}\delta(t - \mu T) \quad (3.4)$$

kann ohne Informationsverlust durch eine Sequenz

$$\langle x_{\mu} \rangle = \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots \quad (3.5)$$

dargestellt werden. Diese Darstellung nennen wir im folgenden *zeitdiskretes Signal*.

Ein zeitdiskretes LTI-System beschreiben wir entsprechend durch seine zeitdiskrete Impulsantwort

$$\langle h_{\mu} \rangle = \dots, h_{-1}, h_0, h_1, \dots, \quad (3.6)$$

### 3 MIMO-Struktur des OAsL-Netzes

Unterklasse	Impulsantwort
allgemein	$\langle h_\mu \rangle = \dots, h_{-1}, h_0, h_1, \dots$
kausal IIR	$\langle h_\mu \rangle = h_0, h_1, \dots$
kausal FIR	$\langle h_\mu \rangle = h_0, h_1, \dots, h_N$
antikausal IIR	$\langle h_\mu \rangle = \dots, h_{-1}, h_0$
antikausal FIR	$\langle h_\mu \rangle = h_{-N}, \dots, h_{-1}, h_0$

Tabelle 3.1: Wichtige Unterklassen zeitdiskreter LTI-Systeme und Struktur der Impulsantwort

mit der es auf Anregung durch das Testsignal

$$\langle x_\mu \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.7)$$

reagiert. Je nach Ausprägung dieser Impulsantwort unterscheiden wir die in Tabelle 3.1 aufgelisteten Unterklassen linearer zeitdiskreter Systeme. Die Ein-Ausgangsbeziehung wird analog zu Gleichung (3.1a) durch die diskrete Faltung

$$\langle y_\mu \rangle = \left\langle \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} x_\nu h_{\mu-\nu} \right\rangle \quad (3.8a)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \langle x_\mu \rangle * \langle h_\mu \rangle \quad (3.8b)$$

beschrieben.

In Analogie zur Fourier-Transformation zeitkontinuierlicher Signale verwenden wir für zeitdiskrete Signale die  $D$ -Transformation:

$$\mathcal{D}\{\langle x_\mu \rangle\} = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} x_\mu D^\mu \quad (3.9)$$

Die Variable  $D$  repräsentiert die Verzögerung um einen Takt.

Den Zusammenhang zwischen Fourier und  $D$ -Transformation erhält man durch die Ersetzung  $D = e^{-j2\pi fT}$ . Für

$$x(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} x_\mu \delta(t - \mu T) \quad X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad (3.10a)$$

$$\langle x_\mu \rangle = \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots \quad x(D) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} x_\mu D^\mu \quad (3.10b)$$

### 3.1 Mathematische Schreibweisen, Begriffe und Definitionen

lautet die Beziehung:

$$X(f) = x(D) \Big|_{D=e^{-j2\pi fT}} \quad (3.10c)$$

Den Übergang von der  $D$ - zur  $z$ -Transformation erreicht man einfach durch die Substitution  $z = D^{-1}$ .

Die praktische Bedeutung der  $D$ -Transformation wird klar, wenn man die Eingangsausgangsbeziehung (3.8a) der  $D$ -Transformation unterzieht:

$$y(D) = x(D)h(D) \quad (3.11)$$

Wie bei der Fourier-Transformation einer zeitkontinuierlichen Faltung wird hier die zeitdiskrete Faltung durch Anwendung der  $D$ -Transformation zur einfachen Multiplikation.

#### 3.1.1.3 MIMO-Systeme

Bild 3.2 zeigt ein MIMO-System mit jeweils  $m$  Ein- und  $n$  Ausgängen. Dabei ist keinesfalls erforderlich, dass  $m = n$  ist. Vielmehr werden wir es in den folgenden Kapiteln mit Systemen zu tun haben, bei denen eine Vielzahl von Eingängen auf eine doch recht überschaubare Anzahl von interessierenden Ausgängen wirkt.

Ein MIMO-System ist dadurch charakterisiert, dass jeder Eingang  $i \in \{1 \dots m\}$  über die jeweilige Übertragungsfunktion  $H_{ij}(f)$  auf jeden Ausgang  $j \in \{1 \dots n\}$  wirkt.

Fassen wir die Fourier-Transformierten der Ein- und Ausgangssignale zu Zeilenvektoren

$$\mathbf{X}(f) = (X_1(f), X_2(f), \dots, X_m(f)) \quad (3.12a)$$

$$\mathbf{Y}(f) = (Y_1(f), Y_2(f), \dots, Y_n(f)) \quad (3.12b)$$

zusammen und ordnen die Übertragungsfunktionen  $H_{ij}(f)$  in einer  $m \times n$ -Matrix

$$\tilde{\mathbf{H}}(f) = \begin{pmatrix} H_{11}(f) & H_{12}(f) & \dots & H_{1n}(f) \\ H_{21}(f) & H_{22}(f) & \dots & H_{2n}(f) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ H_{m1}(f) & H_{m2}(f) & \dots & H_{mn}(f) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

### 3 MIMO-Struktur des OAsL-Netzes

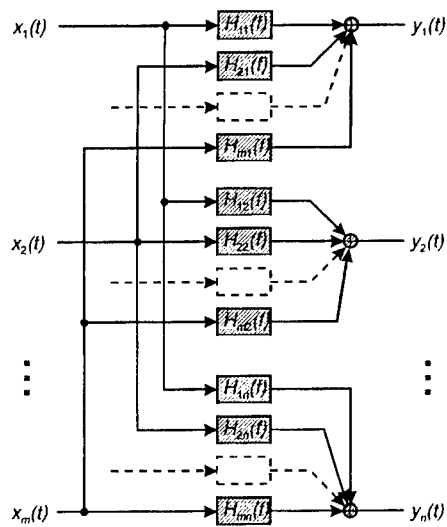


Abbildung 3.2: Zeitkontinuierliches MIMO-System mit  $m$  Ein- und  $n$  Ausgängen

an, erhalten wir folgende Ein- Ausgangsbeziehung:

$$\mathbf{Y}(f) = \mathbf{X}(f) \mathbf{H}(f) \quad (3.14)$$

Für zeitdiskrete MIMO-System gilt die Beziehung

$$\mathbf{y}(D) = \mathbf{x}(D) \mathbf{h}(D) \quad (3.15)$$

analog zu Gleichung (3.11).

#### 3.1.1.4 Leistungsgrößen in MIMO-Systemen

Im folgenden soll nun die Ein-Ausgangsbeziehung von Leistungsgrößen (Autokorrelationsfunktion und Leistungsdichtespektrum) bei MIMO-Systemen untersucht werden.

### 3.1 Mathematische Schreibweisen, Begriffe und Definitionen



Abbildung 3.3: Leistungsgrößen beim SISO-System

Bild 3.3 zeigt die ein- und ausgangsseitigen Leistungsgrößen beim SISO-System. Die Ein-Ausgangsbeziehung für die Autokorrelations-Funktion (AKF) lautet:

$$\ell_y(\tau) = \ell_x(\tau)\ell_h(\tau) \quad (3.16)$$

Dabei sind  $\ell_x(\tau)$  und  $\ell_h(\tau)$  stets (im Zusammenhang dieser Arbeit) Leistungs-AKF,

$$\ell_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} x(t)x^*(t+\tau)dt \quad (3.17a)$$

$$\ell_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} y(t)y^*(t+\tau)dt \quad (3.17b)$$

während  $\ell_h(\tau)$  eine Energie-AKF ist:

$$\ell_h(\tau) = \int_{T/2}^{T/2} h(t)h^*(t+\tau)dt \quad (3.18)$$

Durch Anwendung des Theorems von Wiener-Khintchine

$$\mathcal{F}\{\ell_x(\tau)\} = X(f)X^*(f) \quad (3.19a)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} L_x(f) \quad (3.19b)$$

auf Gleichung (3.16) erhält man im Frequenzbereich die Ein-Ausgangsbeziehung für Leistungsdichtespektren (LDS):

$$L_y(f) = L_x(f)H(f)H^*(f) \quad (3.20)$$

Die Erweiterung dieser einfachen Beziehung auf MIMO-Systeme ist nicht in trivialer Weise möglich. Dies wird schon allein dadurch deutlich, dass der  $m$ -dimensionale Eingangssignalvektor  $\mathbf{x}(t)$  des MIMO-Systems von Bild 3.4

### 3 MIMO-Struktur des OAsL-Netzes

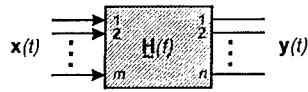


Abbildung 3.4: MIMO-System mit Ein- und Ausgangssignalvektor

durch  $m^2$  Leistungsgrößen beschrieben wird, nämlich durch  $m$  Leistungsspektren (LDS)

$$L_{x,ii}(f) = X_i(f)X_i^*(f), \quad i \in \{1..m\} \quad (3.21)$$

sowie durch  $m(m-1)$  Kreuzleistungsdichtespektren

$$L_{x,ij}(f) = X_i(f)X_j^*(f), \quad i, j \in \{1..m\}, i \neq j. \quad (3.22)$$

Entsprechendes gilt für den Ausgangssignalvektor  $\mathbf{y}(t)$ .

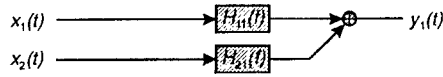


Abbildung 3.5: Ausschnitt aus einem MIMO-System

Zur Verdeutlichung leiten wir zunächst das Leistungsdichtespektrum (LDS) eines Ausgangs als Funktion der LDS zweier Eingänge her, vgl. Bild 3.5. Die LDS der beiden Signale *unmittelbar vor der Additionsstelle* sind offenbar  $X_1(f)X_1^*(f)H_{11}(f)H_{11}^*(f)$  und  $X_2(f)X_2^*(f)H_{21}(f)H_{21}^*(f)$ . Damit folgt für das LDS nach der Additionsstelle:

$$\begin{aligned} L_{y,11}(f) = & X_1(f)H_{11}(f)X_1^*(f)H_{11}^*(f) + \\ & + X_2(f)H_{21}(f)X_2^*(f)H_{21}^*(f) + \\ & + X_1(f)H_{11}(f)X_2^*(f)H_{21}^*(f) + \\ & + X_2(f)H_{21}(f)X_1^*(f)H_{11}^*(f) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Der allgemeine Zusammenhang läßt sich nach Vertauschen der beiden ersten Faktoren  $X_i(f)$  und  $H_{ij}(f)$  in jeder Zeile von Gleichung (3.23) leicht konstruieren:

$$\tilde{\mathbf{L}}_y(f) = \tilde{\mathbf{H}}^T(f)\tilde{\mathbf{L}}_x(f)\tilde{\mathbf{H}}^*(f) \quad (3.24)$$



### 3.1 Mathematische Schreibweisen, Begriffe und Definitionen

In den LDS-Matrizen  $\tilde{L}_x(f)$  und  $\tilde{L}_y(f)$  sind dabei die einzelnen LDS und Kreuz-LDS  $L_{x,ij}(f)$  bzw.  $L_{y,ij}(f)$  so angeordnet, dass – wie üblich – der erste Index  $i$  die Zeile und der zweite Index  $j$  die Spalte der Matrix numeriert:

$$\begin{pmatrix} L_{y,11}(f) & \dots & L_{y,1n}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{y,n1}(f) & \dots & L_{y,nn}(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}(f) & \dots & H_{m1}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{1n}(f) & \dots & H_{mn}(f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{x,11}(f) & \dots & L_{x,1m}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{x,m1}(f) & \dots & L_{x,mm}(f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11}^*(f) & \dots & H_{1n}^*(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m1}^*(f) & \dots & H_{mn}^*(f) \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

#### 3.1.1.5 Erweiterung auf zeitdiskrete MIMO-Systeme

Zur Vermeidung von Zweideutigkeiten müssen zuerst einige Vereinbarungen hinsichtlich der Schreibweise getroffen werden. Liegen am Eingang eines zeitdiskreten MIMO-Systems  $m$  Eingangssequenzen  $\langle x_{i,\mu} \rangle, i \in \{1 \dots m\}$  an, so werden wir die Gesamtheit aller Eingänge stets als Sequenz von Vektoren

$$\langle \mathbf{x}_\mu \rangle = (\dots, \mathbf{x}_{-1}, x_0, x_1, \dots) \quad (3.26)$$

mit

$$\mathbf{x}_\mu = (x_{1,\mu}, x_{2,\mu}, \dots, x_{m,\mu}) \quad (3.27)$$

ansehen. Bei den einzelnen Elementen numeriert der erste Index den Eingang (bzw. Ausgang), der zweite die zeitliche Position. Im  $D$ -Bereich repräsentieren wir das Signal durch einen Vektor von Polynomen in der Variablen  $D$ :

$$\mathbf{x}(D) = (x_1(D), x_2(D), \dots, x_m(D)) \quad (3.28)$$

mit

$$x_i(D) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} x_{i,\mu} D^\mu \quad (3.29)$$

### 3 MIMO-Struktur des OAsL-Netzes

Entsprechend ist die Eingangs-AKF-Sequenz eine Folge von  $m \times m$ -Matrizen:

$$\langle \tilde{\ell}_{x,\mu} \rangle = \langle \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_{\nu}^T \mathbf{x}_{\nu+\mu}^* \rangle \quad (3.30)$$

Die  $D$ -Transformierte dieser Sequenz

$$\tilde{\ell}_x(D) = \mathbf{x}^T(D) \mathbf{x}^*(D) \quad (3.31)$$

wird durch die Substitution  $D = e^{j2\pi fT}$  zum (periodischen) LDS des zeitdiskreten Signals.

Folglich wird bei zeitdiskreten MIMO-Systemen Gleichung (3.24) zu:

$$\tilde{\ell}_y(D) = \tilde{\mathbf{h}}^T(D) \tilde{\ell}_x(D) \tilde{\mathbf{h}}^*(D) \quad (3.32)$$

Die strukturelle Ähnlichkeit zwischen den Gleichungen (3.32) und (3.24) für MIMO-Systeme und der Gleichung (3.20) für SISO-Systeme verspricht auch bei der numerischen Berechnung größerer Systeme handhabbare Komplexität.

#### 3.1.2 Zum Begriff des Kanals

Als *Kanal* wird traditionell die physikalisch vorhandene Verbindung von Sender und Empfänger verstanden. In diesem Sinne könnte man jede Doppelader eines Kupferkabels als einen Kanal betrachten. Um Mißverständnissen vorzubeugen, wollen wir die tatsächlich vorhandene, sozusagen greifbare Verbindung im folgenden als *physikalischen Kanal* bezeichnen.

Losgelöst von der physikalischen Realität bezeichnen wir als *logischen Kanal* oder einfach *Kanal* jede – wie auch immer geartete – Verbindung zwischen einem Sender und einem Empfänger, die eine Übertragung zuläßt. Für die nachfolgenden Untersuchungen ist ein (logischer) Kanal

- unidirektional,
- linear,
- zeitinvariant (jedenfalls hinsichtlich jener zeitlichen Größenordnungen, die für die Charakterisierung des Übertragungsverhaltens relevant sind) und, im allgemeinen,

### 3.1 Mathematische Schreibweisen, Begriffe und Definitionen

- durch additiv eingekoppelte Störungen beeinträchtigt.

In einem MIMO-System bildet also jedes einzelne Ein-Ausgangspaar im Sinne dieser Definition einen Kanal, während alle anderen Eingänge Störquellen darstellen.

Weiterhin unterscheiden wir zwischen *zeitkontinuierlichen* Kanälen, die zeitkontinuierliche Ein- und Ausgangssignale haben und durch eine Übertragungsfunktion  $H(f)$  charakterisiert werden, und *zeitdiskreten* Kanälen, die – nicht notwendigerweise mit identischer Symbolrate – zeitdiskrete Ein- und Ausgangssignale aufweisen und mit Hilfe der  $D$ -Transformierten  $h(D)$  der zeitdiskreten Impulsantwort beschrieben werden.

#### 3.1.3 System, Subsystem, Komponente und Kontext

Dieser Abschnitt dient der Definition einiger Begriffe, die eine präzise Beschreibung der Voraussetzungen für die Auslegung und Optimierung einer Übertragungseinrichtung (ÜE) erlauben. Wenn zeitvariantes Verhalten relevanter Einflußgrößen vorliegt, muß die Optimierung ständig im laufenden Betrieb erfolgen (Adaption). Für die nachfolgenden Definitionen in diesem Abschnitt können wir Optimierung und Adaption synonym verwenden.

Die Optimierung einer Übertragungseinrichtung (UE) führt nur dann zum globalen Optimum, wenn alle relevanten Einflußgrößen bekannt sind und zur Optimierung herangezogen werden können. Für ÜE im OAsI-Netz können wir dabei zwei grundlegende Aussagen treffen:

1. Relevante Einflußgrößen sind die Verzerrungen im Übertragungsweg, das Echo, die durch Übersprechen anderer Quellen im Kabelbündel eingekoppelten Störsignale, das thermische Rauschen und die Impulsstörung.
2. Die Einflußgrößen sind i. a. zeitabhängig, so dass die Optimierung während des Betriebes (dynamisch) erfolgen muß.

Aus ersterer Aussage wird klar, dass alle relevanten Einflußgrößen ihre Ursachen im Kabelbündel und dessen Beschaltung an den Kabelenden haben. Damit kann das beschaltete Kabelbündel als abgeschlossenes System angesehen

### 3 MIMO-Struktur des OAsL-Netzes

werden, für dessen Optimierung hinsichtlich eines beliebigen Kriteriums keine Kenntnis von außen einwirkender Größen erforderlich ist.

**Definition 3.1.** *Ein Übertragungssystem ist in sich abgeschlossen in dem Sinne, dass die Ursachen aller, für die Optimierung hinsichtlich eines bestimmten Optimierungskriteriums relevanten Einflußgrößen innerhalb des Systems liegen und damit bekannt sind.*

Während obige Definition grundlegend physikalischer Natur ist, führte die technische Entwicklung zu einer Gliederung eines Übertragungssystems in *Subsysteme*. Die folgende Definition eines Subsystems orientiert sich an der technischen Realität, und nicht an theoretischen Erfordernissen.

**Definition 3.2.** *Ein Subsystem ist durch folgende Merkmale gekennzeichnet:*

- *Ein Subsystem ist vollständig Bestandteil eines Systems nach Definition 3.1.*
- *Die von einem Subsystem übertragenen Daten sind unabhängig von allen anderen im System übertragenen Daten.*

*Sender und Empfänger innerhalb eines Subsystems heißen Komponenten.*

Bild 3.6 illustriert noch einmal zusammenfassend die bislang definierten Begriffe.

Subsysteme sind voneinander in der Praxis häufig durch räumliche Trennung abgegrenzt. Üblicherweise wird bis heute die Optimierung stets für ein Subsystem (oder gar nur für einige Komponenten eines Subsystems) durchgeführt. Die Wirkung der anderen Subsysteme innerhalb des Systems wird als Störung aufgefaßt, über deren Art lediglich statistische Annahmen getroffen werden können. Wir können diese Sichtweise wie folgt charakterisieren:

Von den relevanten Einflußgrößen werden für die Optimierung (oder Adaption) des Subsystems nur die im Subsystem selbst entstehenden als vollständig bekannt betrachtet; der Einfluß der anderen Subsysteme wird nur statistisch berücksichtigt.

### 3.1 Mathematische Schreibweisen, Begriffe und Definitionen

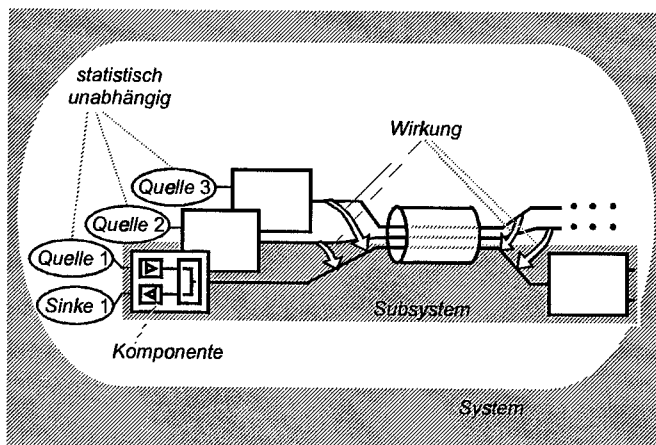


Abbildung 3.6: Aufteilung eines Systems in Subsysteme und Komponenten

Diese Einschränkung erscheint zwar technisch sinnvoll, ist aber aus theoretischer Sicht willkürlich und suboptimal. Zwischen der optimalen Lösung – Optimierung des gesamten Übertragungssystems nach Def. 3.1 – und der technisch einfachsten Lösung – Optimierung einer Komponente unter Berücksichtigung der Wirkung aller anderen Komponenten und Subsysteme als statistisch beschreibbare Störung – existieren beliebig viele Zwischenlösungen.

Offensichtlich verdient der Verlust durch Einschränkung der berücksichtigten Subsysteme und Komponenten eine genauere Betrachtung. Diesem Zwecke dient die nachfolgende Definition eines *Kontextes*, innerhalb dessen die Optimierung durchgeführt wird.

**Definition 3.3.** Als Kontext einer Optimierung bzw. Adaption wird die Menge aller Komponenten und Subsysteme bezeichnet, deren Wirkung auf die zu optimierende Komponente als vollständig bekannt (im deterministischen Sinne) vorausgesetzt wird.

Die Größe des Kontextes bestimmt also den Trade-off zwischen Verlust gegenüber dem Optimum und technischem Aufwand.

## 3.2 Modellierung der Übertragungsstrecke

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Abbildung der Struktur der Übertragungsstrecke, also der gegenseitigen Wirkung von Nutz- und Störsignalen, auf ein mathematisches Modell. Die Beschreibung des konkret angewendeten Übertragungsverfahrens wird hingegen in Abschnitt 3.4 auf Seite 44 behandelt.

Als Einführung in die mathematische Beschreibung eines Systems betrachten wir das HDSL-System in *Dual-Duplex*-Technik von Bild 3.7. Kennzeichnend ist die Aufteilung des Eingangs-Bitstroms auf zwei Sendesignale, die über getrennte Doppeladern gesendet werden. Beide Richtungen werden dabei im gleichen Frequenzband, also Frequenzgleichlage, übertragen.

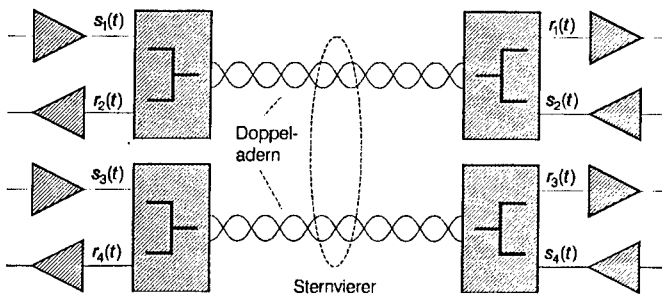


Abbildung 3.7: Verschaltung eines HDSL-Systems in Dual-Duplex-Technik

An dieser Stelle sollen anhand des in Bild 3.7 dargestellten Prinzips zunächst die systemtheoretisch zu modellierenden Einflüsse des physikalischen Übertragungskanal betrachtet werden.

### 3.2.1 Nutzsinalpfad

Die Betrachtung eines ganzen *Kabelbündels* mit einer Vielzahl angeschalteter Nachrichtenquellen und -senken erfordert eine präzise Definition des Begriffs *Nutzsinalen*.

### 3.2 Modellierung der Übertragungsstrecke

**Definition 3.4.** In einem System, das Nachrichten von  $N$  unabhängigen Quellen zu  $N$  Sinnen überträgt, ist der Nutzsignalpfad der Weg des elektrischen Signals, das die Nachricht von Quelle  $k$  trägt, bis zum zugeordneten Empfänger der Sinke  $k$ .

Bild 3.8 verdeutlicht die Definition des Nutzsignalpfades. Entlang des Nutzsignalpfades wird jedes der Sendesignale  $s_j(t)$  im Laufe der Übertragung aufgrund der elektrischen Eigenschaften der Doppeladern und der Gabelschaltungen linear verzerrt. Diese Verzerrungen beschreiben wir durch eine *Nutzsignal-Übertragungsfunktion*  $H_{ii}(f)$ :

$$R_i(f) = S_i(f)H_{ii}(f) + N_i(f) \quad (3.33)$$

$N_i(f)$  faßt alle, am Empfänger wirksamen, additiv eingekoppelten Signalspektren zusammen, die von der, im Nutzsignalpfad übertragenen, Nachricht statistisch unabhängig sind. Deren Klassifizierung widmet sich der folgende Abschnitt.

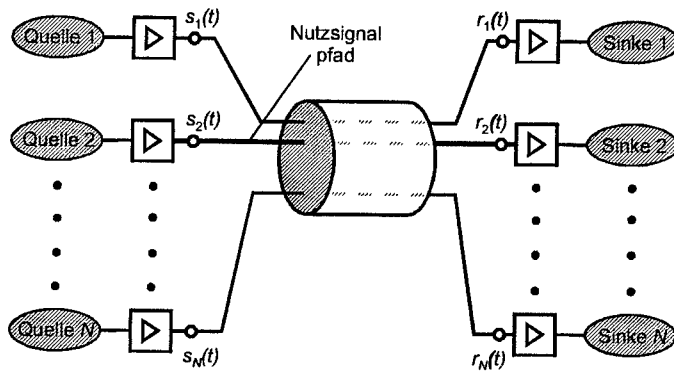


Abbildung 3.8: Der Nutzsignalpfad ist der Weg des elektrischen Signals vom einer Quelle zugeordneten Sender bis zum der entsprechende Sinke zugeordneten Empfänger.

### 3.2.2 Klassifizierung von Störungen

Als *Störung* wollen wir alle dem Nutzsignal überlagerten Anteile bezeichnen, die nicht kausal mit der Nachricht, die durch das Nutzsignal übertragen wird, zusammenhängen. Aus der Forderung nach statistischer Unabhängigkeit der Datenquellen folgt, dass alle Störungen vom Nutzsignal ebenfalls statistisch unabhängig sind.

### 3.2.3 Interne Störungen

Wesentlich für die technische Bekämpfung von Störeinflüssen ist, ob die Störquelle dem gestörten Subsystem (vgl. Definition 3.2 auf Seite 30) bekannt ist, oder nicht. Im ersteren Falle kann zumindest theoretisch die Wirkung der Quelle auf das Subsystem geschätzt und damit kompensiert werden. Aus der Sicht des gestörten Subsystems ist die Störung dann *deterministisch*. Im letzteren Falle ist die Ursache unbekannt; es können nur die statistischen Parameter der Störung geschätzt werden. Aus der Sicht des Subsystems ist die Störung *stochastisch*.

Soweit die auf das Subsystem wirkenden Störungen innerhalb des Systems erzeugt werden, entscheidet die Wahl des Kontextes (vgl. Definition 3.3 auf Seite 31), ob die Ursache bekannt ist (die störende Komponente also innerhalb des gewählten Kontextes liegt). In diesem Fall sprechen wir von einer *internen Störung*.

**Definition 3.5.** Eine Störung heißt intern, wenn sie

1. von einer innerhalb des gewählten Kontextes liegenden Komponente erzeugt wird, und
2. vom Nutzsignal der erzeugenden Komponente kausal abhängig ist.

Alle anderen Störungen heißen externe Störungen.

Insbesondere sind das thermische Rauschen und die Impulsstörungen externe Störungen.



### 3.2 Modellierung der Übertragungsstrecke

Abhängig von der relativen Lage der störenden Komponente zum gestörten Subsystem werden üblicherweise die in den nachfolgenden Abschnitten diskutierten Störungspfade unterschieden. Es sei darauf hingewiesen, dass diese Unterscheidung nur insoweit Sinn macht, als die verursachende Komponente im Kontext des betrachteten Subsystems liegt, es sich also um eine interne Störung handelt.

#### 3.2.3.1 Lokales Echo

Die nächstliegende fremde Störquelle aus der Sicht des Empfängers ist der Sender am gleichen Leitungsende, der über dieselbe Doppelader sendet. Durch – in der Praxis unvermeidbare – Anpassungsfehler der Gabelschaltung an die Leitungsimpedanz sowie durch Reflexionen (an Spleißstellen, Steckkontakten usw.) wird ein Teil des Sendesignals dem Empfangsnutzsignal am gleichen Leitungsende überlagert, vgl. Bild 3.9. Dies wird als *lokales Echo* oder kurz *Echo* bezeichnet. Im Sinne obiger Klassifikation ist das Echo eine Störung, da das Empfangsnutzsignal und das Sendesignal am gleichen Leitungsende i.a. unkorreliert sind.

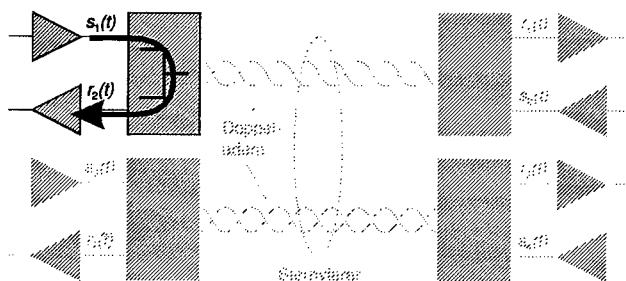


Abbildung 3.9: Wirkung des lokalen Echos des Sendesignals  $s_1(t)$  auf das Empfangssignal  $r_2(t)$

Echo-Störungen treten naturgemäß nur bei Duplex-Übertragung mit zumindest überlappenden Teilbändern für jede Richtung auf. Im betrachteten Beispiel „sieht“  $r_1(t)$  ein Echo von  $s_2(t)$ ,  $r_2(t)$  ein Echo von  $s_1(t)$  usw.

### 3.2.3.2 Nahnebensprechen (NEXT)

Als Near end crosstalk (NEXT) wird das Übersprechen eines Senders an einer anderen Doppellader, aber am gleichen Leitungsende auf das Empfangssignal bezeichnet, siehe zur Verdeutlichung Bild 3.10.

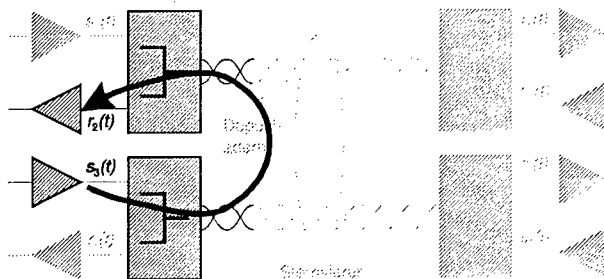


Abbildung 3.10: Wirkung des Nahnebensprechens von  $s_3(t)$  auf das Empfangssignal  $r_2(t)$

NEXT tritt nur dann auf, wenn auf beiden Leitungsseiten in überlappenden Frequenzbereichen arbeitende Sender verwendet werden. Rein asymmetrische Systeme, die grundsätzlich nur in einer Leitungsrichtung verwendet werden (z.B. ADSL), stören sich gegenseitig nicht durch NEXT.

Wenn ein System durch NEXT gestört wird, so ist dies häufig die dominante Störung. Dies liegt darin begründet, dass schon auf den ersten Metern Leitungslänge ein hochpegeliges Sendesignal dem durch nahezu die gesamte Leitungslänge gedämpften und damit pegelschwachen Empfangssignal überlagert wird.

### 3.2.3.3 Fernnebensprechen (FEXT)

Im Gegensatz zu NEXT liegt bei Far end crosstalk (FEXT) die Störquelle am entfernten Ende der Leitung. Da die Einkopplung auch hier auf den ersten Metern Leitungslänge hinter dem Sender erfolgt, werden Nutz- und Störanteil gemeinsam über nahezu die gesamte Übertragungslänge gedämpft. Folglich ist die Wirkung von FEXT weitaus geringer als jene von NEXT.

### 3.2 Modellierung der Übertragungsstrecke

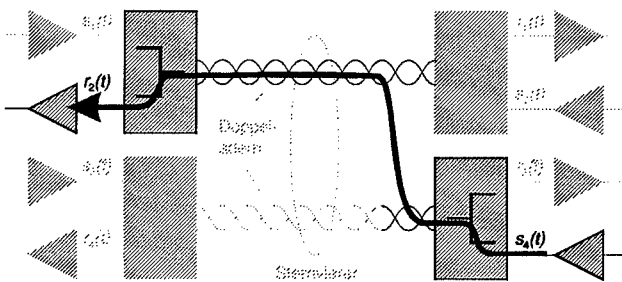


Abbildung 3.11: Wirkung des Fernnebensprechens von  $s_4(t)$  auf das Empfangssignal  $r_2(t)$

Die prinzipielle Wirkung von FEXT ist in Bild 3.11 für das hier verwendete Beispiel illustriert.

#### 3.2.4 Externe Störungen

Externe Störungen sind per definitionem (vgl. Def. 3.5 auf Seite 34) grundsätzlich stochastischer Natur. Dabei spielt es im Sinne der Definition keine Rolle, ob das deterministische Bildungsgesetz der Störung aus physikalischen Gründen unzugänglich bzw. nicht-existent ist (z. B. thermisches Rauschen), oder aufgrund einer technisch bedingten Einschränkung des Kontextes nicht zur Verfügung steht.

##### 3.2.4.1 Übersprechen anderer, unbekannter Systeme

Die Wirkung von Komponenten außerhalb des gewählten Kontextes auf das betrachtete Subsystem ist eine externe Störung. Obwohl die Ursache aus globaler Sicht bekannt, und damit die Störung grundsätzlich deterministisch modellierbar und kompensierbar wäre, steht die dafür notwendige Information (z. B. die vom störenden Subsystem übertragene Nachricht) innerhalb des gewählten Kontextes nicht zur Verfügung.

#### 3.2.4.2 Thermisches Rauschen

Wie sich durch Abschätzung [TM92, MT94] leicht zeigen läßt, kann die Wirkung des thermischen Rauschens am Empfängereingangswiderstand immer dann vernachlässigt werden, wenn *externe* Störungen als lokales Echo oder NEXT vorliegen. Eine reine FEXT-Störung ist hingegen meistens nicht dominant gegenüber thermischen Rauschen.

Generell ist zu beachten, dass mit Erweiterung des Kontextes Anzahl und Gesamtleistung anderer als stochastisch betrachteter Störquellen im Vergleich zum thermischen Rauschen abnehmen. Je größer der Kontext gewählt wird, desto weniger ist also thermisches Rauschen vernachlässigbar.

Die am Eingang des Empfängers wirksame Störung wird stets durch ein weißes Leistungsspektrum mit der Leistungsdichte

$$L_{th} = L_{0,th} F \quad (3.34)$$

beschrieben. Dabei ist  $L_{0,th}$  die Leistungsdichte des thermischen Rauschens am Verstärkereingangswiderstand bei Betriebstemperatur und  $F$  die mittlere Rauschzahl des Verstärkers.

#### 3.2.4.3 Impulsstörungen

Auf Leitungen im OAsL-Netz der Telekom werden Impulsstörungen beobachtet, deren Ursachen noch nicht vollständig geklärt sind. Als mögliche Störquellen kommen unter anderem Plain old telephone systems (POTS) mit Impulswahlverfahren (IWV) in Betracht.

Eine erste umfassende Erfassung und Analyse der Impulsstörungen im Bereich der Deutschen Telekom wurde vom Forschungsinstitut der Telekom durchgeführt und in [fz-94] dokumentiert.

Impulsstörungen sind ihrem Wesen nach transiente, instationäre Vorgänge und sprengen damit den Rahmen, der dieser Arbeit gezogen ist.

### 3.3 Beschreibung als MIMO-System

#### 3.3.1 Die Übertragungsstrecke in Matrix-Darstellung

Beschreiben wir alle bisher genannten Störungen durch Nebensprechen (Echo, NEXT, FEXT) mit Hilfe von Übertragungsfunktionen  $H_{ij}(f)$  und vernachlässigen zunächst die thermische Störung, läßt sich das System durch das in Bild 3.12 dargestellte Schaltbild beschreiben.

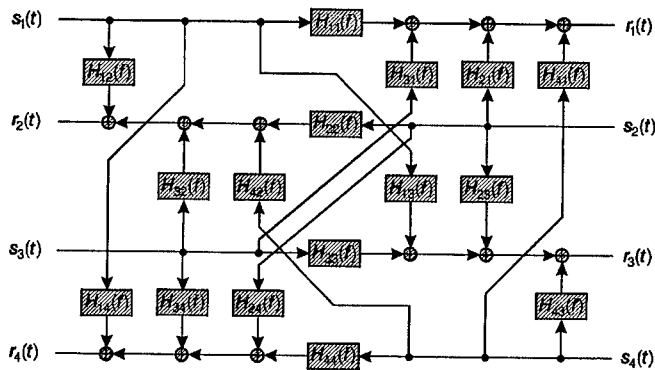


Abbildung 3.12: Lineares Modell des Dual-Duplex-HDSL-Systems mit Darstellung aller Nutz- ( $H_{ii}(f)$ ) und Nebensprechübertragungsfunktionen ( $H_{ij}(f)$ ,  $i \neq j$ )

Dabei bewertet eine Übertragungsfunktion  $H_{ij}(f)$  definitionsgemäß stets die Wirkung des Sendesignals  $s_i(t)$  auf das Empfangssignal  $r_j(t)$ . So ist  $H_{11}(f)$  eine Nutzsignalübertragungsfunktion,  $H_{12}(f)$  eine Echoübertragungsfunktion,  $H_{13}(f)$  eine FEXT- und  $H_{14}(f)$  eine NEXT-Übertragungsfunktion.

Wir fassen nun alle Sendesignale  $s_i(t)$  zum Sendesignalvektor

$$\mathbf{s}(t) = (s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_4(t)) \quad (3.35)$$

und alle Empfangssignale  $r_j(t)$  zum Empfangssignalvektor

$$\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t), r_4(t)) \quad (3.36)$$

### 3 MIMO-Struktur des OAsL-Netzes

zusammen. Damit ergibt sich für die Ein-Ausgangsbeziehung des HDsL-Systems im Frequenzbereich in Vektorschreibweise:

$$\mathbf{R}(f) = \mathbf{S}(f) \tilde{\mathbf{H}}(f) \quad (3.37)$$

Die Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}(f)$  ist definiert als

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}(f) &= \begin{pmatrix} H_{11}(f) & H_{12}(f) & H_{13}(f) & H_{14}(f) \\ H_{21}(f) & H_{22}(f) & H_{23}(f) & H_{24}(f) \\ H_{31}(f) & H_{32}(f) & H_{33}(f) & H_{34}(f) \\ H_{41}(f) & H_{42}(f) & H_{43}(f) & H_{44}(f) \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{pmatrix} (f) \quad (3.38) \end{aligned}$$

Bild 3.13 illustriert die Zuordnung der einzelnen Elemente  $H_{ij}(f)$  der Übertragungsmatrix zu Nutzsignal-, Echo-, NEXT- und FEXT-Übertragungsfunktionen. Die Elemente  $H_{ii}(f)$  auf der Hauptdiagonalen von  $\tilde{\mathbf{H}}(f)$  sind stets die Übertragungsfunktionen im Nutzsignalpfad, während die Zuordnung der restlichen Elemente zu den korrespondierenden physikalischen Effekten (Echo, NEXT, FEXT) stark von der Nummerierung der Sende- und Empfangssignale abhängt. Hier wird man nicht umhinkommen, für jedes konkret zu untersuchende System eine geeignete Nummerierung zu finden.

#### 3.3.2 Eine vereinfachende graphische Darstellungsform

Bild 3.12 auf der vorherigen Seite läßt bereits erahnen, welche Komplexität Modelle für ein mit drei oder vier Dreifach-Duplex-Systemen beschaltetes Ortskabel annehmen. Während diese Komplexität numerisch durchaus zu bewältigen ist<sup>1</sup>, stößt die graphische Darstellung solcher Systeme auf Papier oder am Bildschirm sehr viel früher an ihre Grenzen.

<sup>1</sup>Selbst moderne Arbeitsplatzrechner können heute mit Matrizen mit mehreren tausend Elementen umgehen, z.B. mit Hilfe von Programmen wie MATLAB oder Maple.

### 3.3 Beschreibung als MIMO-System

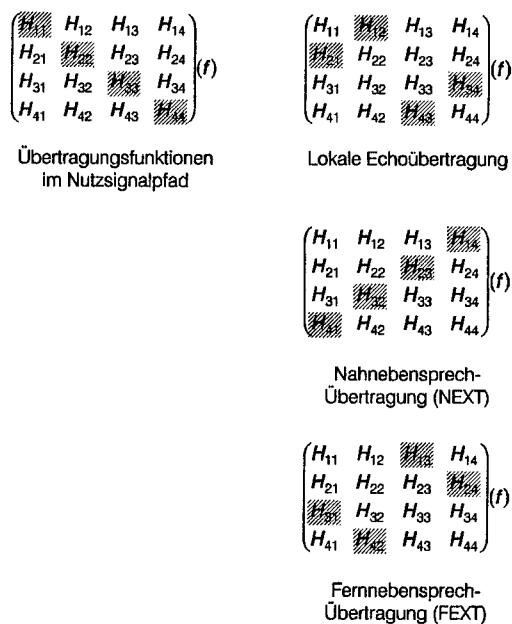


Abbildung 3.13: Zur Bedeutung der einzelnen Elemente der Übertragungsmatrix

Aus diesem Grunde ersetzen wir im folgenden die in der Systemtheorie und Regelungstechnik verbreitete Darstellung mit Blöcken für Übertragungsfunktionen, Kreisen für Additionsstellen und ausgefüllten Kreisen für Verzweigungsstellen durch gerichtete Graphen, bestehend aus Knoten und gewichteten Kanten. Jede gerichtete Kante eines Graphen ist mit der Übertragungsfunktion gewichtet. Gehen von einem Knoten mehrere Kanten aus, handelt es sich um eine Verzweigungsstelle, treffen mehrere Kanten zusammen, um eine Additionsstelle. Da Kanten per definitionem mit Übertragungsfunktionen gewichtet werden, können wir auf die explizite Angabe des Funktionsparameters ebenfalls verzichten; statt  $H(f)$  schreiben wir einfach  $H$ . Bild 3.14 verdeutlicht die Vorgehensweise an einem einfachen Beispiel.

### 3 MIMO-Struktur des OAsL-Netzes

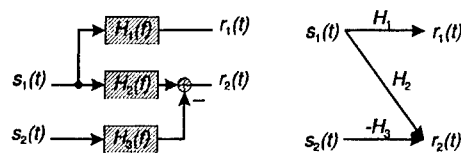


Abbildung 3.14: Zur Ersetzung der üblichen systemtheoretischen Darstellung durch gerichtete Graphen mit gewichteten Kanten

Wir fassen die Regeln nochmals zusammen:

**Definition 3.6.** Beschreibung der Struktur eines linearen Systems mit mehreren Ein- oder Ausgängen (MIMO-System) als linearer Graph.

1. Alle Kanten sind gerichtet und mit der (i.a. komplexwertigen) Übertragungsfunktion gewichtet.
2. Kanten werden bei zeitkontinuierlichen Systemen mit dem Namen der Übertragungsfunktion (ohne formale Frequenzvariable), bei zeitdiskreten Systemen mit dem Namen der D-Transformierten der Impulsantwort (ohne formale Variable  $D$ ) oberhalb der Kante bezeichnet.
3. Knoten sind Verzweigungsstellen (für abgehende Kanten) oder Addierstellen (für ankommende Kanten).
4. Subtraktionsstellen werden dadurch modelliert, dass das Gewicht der Kante des Subtrahenden mit  $-1$  multipliziert wird.
5. Ein Knoten ohne ankommende Kante (Eingang) wird mit einem Eingangssignal, ein Knoten ohne abgehende Kante (Ausgang) mit einem Ausgangssignal bezeichnet.
6. Der Graph wird so umsortiert, dass alle Eingänge links oder oben, alle Ausgänge rechts oder unten stehen.

Letztere Vorschrift (d. i. die Sortierung nach Ein- und Ausgängen) hat den Vorteil, dass die Darstellung als gerichteter Graph unmittelbar mit der Matrizen-gleichung für die Ein-Ausgangsbeziehung korrespondiert.



### 3.3 Beschreibung als MIMO-System

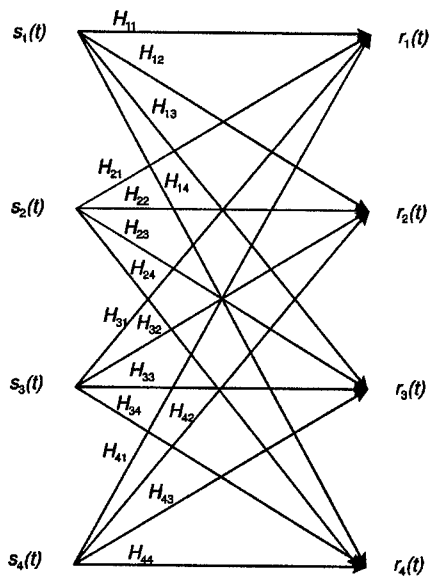


Abbildung 3.15: Darstellung der Struktur der Übertragungsstrecke für ein Dual-Duplex-HDSL-System als gerichteter Graph

Um die Sinnhaftigkeit dieser Vorgehensweise zu demonstrieren, ist in Bild 3.15 das Blockschaltbild von Bild 3.12 auf Seite 39 als gerichteter Graph dargestellt. Hier wird in besonderem Maße deutlich, dass diese Darstellungsform sowohl die Symmetrie der Anordnung unmittelbar erkennen läßt, als auch mit der Ein-Ausgangsbeziehung in Matrixform entsprechend Gleichung (3.37) auf Seite 40 korrespondiert.

### 3.4 Modellierung des Übertragungsverfahrens

Nachdem die Modellierung der Struktur der Übertragungsstrecke als Matrix von Übertragungsfunktionen festgelegt wurde, gilt dieser Abschnitt der Beschreibung des Übertragungsverfahrens. Insbesondere wollen wir uns mit folgenden Fragen beschäftigen:

- Ist für Bandpasssysteme die Bandpassdarstellung oder die äquivalente Tiefpassdarstellung besser geeignet?
- Läßt sich eine einheitliche Darstellung für alle gängigen Systeme, vom Tiefpasssystem mit Pulse amplitude modulation (PAM) bis hin zum Vielträgerverfahren DMT finden?
- Ist die Darstellung mit der in Abschnitt 3.2 eingeführten Abbildung der Struktur der Übertragungsstrecke auf Matrizen verträglich?

Als Vorbereitung sollen im folgenden Abschnitt einige grundlegende Zusammenhänge zwischen der Bandpassdarstellung und der äquivalenten Tiefpassdarstellung beleuchtet werden.

#### 3.4.1 Bandpass- versus äquivalente Tiefpassdarstellung

In diesem – und nur in diesem – Abschnitt haben wir es zusätzlich zu Signalen, Vektoren von Signalen, deren Spektren, und Matrizen auch noch mit „äquivalenten Basisbandsignalen“, also komplexwertigen Zeitsignalen, zu tun. Um möglicher Verwirrung vorzubeugen, werden komplexwertige Zeitsignale hier durch einen zusätzlichen Unterstrich gekennzeichnet:

$$\underline{x}(t) = x_r(t) + jx_i(t) \quad (3.39)$$

Zunächst soll der Zusammenhang zwischen Zeitsignal und seiner Fourier-Transformierten näher untersucht werden. Die Gleichungen auf der linken Seite folgen der traditionellen Darstellung als äquivalentes Tiefpasssignal, d. h.

### 3.4 Modellierung des Übertragungsverfahrens

Inphase- und Quadratursignal werden durch den Realteil  $x_r(t)$  bzw. den Imaginärteil  $x_i(t)$  eines komplexwertigen Zeitsignals  $x(t)$  repräsentiert. Auf der rechten Seite werden wir Inphase- und Quadratursignal durch Komponenten  $x_1(t)$  bzw.  $x_2(t)$  eines (Zeilen-) Vektors  $\mathbf{x}(t)$  darstellen:

$$\begin{array}{ll} \text{Äquivalente Tiefpassdarstellung} & \text{Bandpassdarstellung} \\ x(t) = x_r(t) + jx_i(t) & \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t)) \end{array} \quad (3.40)$$

Nach der Fourier-Transformation erhalten wir links ein komplexwertiges Spektrum, rechts wiederum einen Vektor mit zwei komplexwertigen Komponenten:

$$\begin{array}{ll} X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} & \mathbf{X}(f) = \mathcal{F}\{\mathbf{x}(t)\} \\ = X_r(f) + jX_i(f) & = (X_1(f), X_2(f)) \end{array} \quad (3.41)$$

Aufgrund des Zuordnungssatzes der Fourier-Transformation hängen Real- und Imaginärteil des Spektrums jeweils beide von Real- und Imaginärteil des komplexen Zeitsignals ab. Es existiert also keine unmittelbare Zuordnung zwischen Inphase-Zeitsignal und einem entsprechenden „Inphase-Spektrum“. Bei der Bandpassdarstellung mit Vektoren werden hingegen die Komponenten des Signalvektors einzeln transformiert, so dass nach wie vor das Inphase-Spektrum dem Inphase-Signal zugeordnet werden kann (und entsprechend für die Quadratur-Komponenten):

$$X_r(f) \neq \mathcal{F}\{x_r(t)\} \quad X_1(f) = \mathcal{F}\{x_1(t)\} \quad (3.42)$$

$$X_i(f) \neq \mathcal{F}\{x_i(t)\} \quad X_2(f) = \mathcal{F}\{x_2(t)\} \quad (3.43)$$

Von besonderem Interesse für unsere Betrachtungen ist die Ein-Ausgangsbeziehung für lineare Systeme, jeweils in beiden Darstellungsformen.



$$Y(f) = X(f)H(f) \quad \mathbf{Y}(f) = \mathbf{X}(f) \underset{\sim}{2 \times 2} \mathbf{H}(f) \quad (3.44)$$

### 3 MIMO-Struktur des OAsL-Netzes

Die Bedeutung der  $2 \times 2$ -Matrix

$$\tilde{\mathbf{H}}(f) = \begin{pmatrix} H_{11}(f) & H_{12}(f) \\ H_{21}(f) & H_{22}(f) \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

wird einsichtig, wenn man bedenkt, dass  $\mathbf{X}(f)$  und  $\mathbf{Y}(f)$  Vektoren sind. Durch die Matrixelemente  $H_{11}(f)$  und  $H_{22}(f)$  wird die Übertragung von Inphase- bzw. Quadraturkomponente beschrieben, während die Elemente  $H_{12}(f)$  und  $H_{21}(f)$  dem Übersprechen von Inphase- auf Quadraturanteil bzw. umgekehrt entsprechen. Damit lautet der Zusammenhang zwischen  $H(f)$  (links) und der Matrix  $\tilde{\mathbf{H}}(f)$  (rechts):

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ H(f) + H(-f) \} + \frac{j}{2} \operatorname{Im} \{ H(f) - H(-f) \} = H_{11}(f) = H_{22}(f) \quad (3.46)$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ H(f) - H(-f) \} + \frac{j}{2} \operatorname{Im} \{ H(f) + H(-f) \} = H_{12}(f) = -H_{21}(f) \quad (3.47)$$

Hier wird *ein* Vorteil der Bandpassdarstellung für unsere Zwecke deutlich: Die häufig interessierenden Übersprechanteile von Inphase- auf Quadraturkomponente und umgekehrt lassen sich als Elemente der Matrix  $\tilde{\mathbf{H}}(f)$  direkt ablesen, während sie aus der äquivalenten Tiefpassdarstellung nur durch Ermittlung der geraden und ungeraden Anteile der komplexen Übertragungsfunktion  $H(f)$  zu gewinnen sind.

#### 3.4.2 Zur Modellierung von Mehrträgersystemen

Eine der eingangs gestellten Fragen war auf die Modellierung von DMT-Systemen gerichtet, die wiederum zur Klasse der Mehrträgersysteme zählen. Dabei richtet sich unser Interesse nicht so sehr auf die technische Realisierung eines derartigen Systems (DMT, Filterbank), sondern mehr auf die Modellierung der grundsätzlichen Übertragungseigenschaften.

In Bild 3.16 ist schematisch das Sende-Leistungsspektrum eines Mehrträgersystems dargestellt. Es besteht aus einer Anzahl Teilbänder, die sich die gesamte verfügbare Bandbreite teilen. Innerhalb eines Teilbands wird üblicherweise

### 3.4 Modellierung des Übertragungsverfahrens

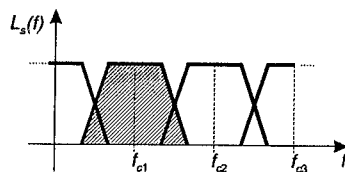


Abbildung 3.16: Schematische Darstellung des Sende-Leistungsspektrums eines Mehrträgersystems

ein modulierte Digitalsignal übertragen, während die Signale in verschiedenen Teilbändern voneinander unabhängig sind. Bemerkenswert ist der Umstand, dass z. B. bei DMT-Systemen zwar die Träger der einzelnen Teilbänder orthogonal sind, die Teilbänder auf der Frequenzachse aber nicht disjunkt.

Bei einem DMT-System liegt aufgrund der eingesetzten inversen Fast Fourier Transform (FFT) das Nebensprechen zwischen benachbarten Teilbändern um Größenordnungen über dem Nebensprechen zwischen weiter entfernten Teilbändern. Zur Modellbildung gehen wir folgendermaßen vor:

- Das Sendesignal  $s_i(t)$  jeden Teilbandes wird zunächst als unabhängiges Eingangssignal betrachtet.
- Alle Sendesignale werden zu einem Sendesignalvektor  $\mathbf{s}(t)$  zusammengefaßt.
- Verzerrungen des Kanals und Übersprechen zwischen benachbarten Teilbändern werden durch eine Matrix  $\tilde{\mathbf{H}}(f)$  beschrieben.

Bild 3.17 zeigt die auftretenden Nutzsignal- und Nebensprechübertragungsfunktionen als gerichteten Graphen entsprechend der Definition 3.6 auf Seite 42. Dieser spiegelt unmittelbar den Aufbau der Matrix  $\tilde{\mathbf{H}}(f)$  wider.

Die Hauptdiagonalelemente  $H_{ii}(f)$  sind i. a. alle gleich, da alle Teilbänder über denselben physikalischen Kanal übertragen werden. Die übrigen, von null verschiedenen Elemente von  $\tilde{\mathbf{H}}(f)$  beschreiben das Übersprechen zwischen benachbarten Teilbändern und hängen wesentlich von der verwendeten Technik

### 3 MIMO-Struktur des OASL-Netztes

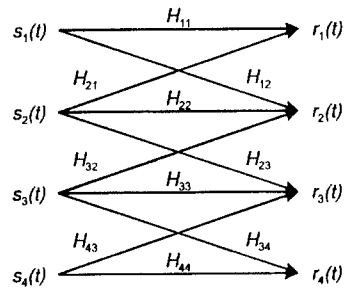


Abbildung 3.17: Modellierung eines Mehrträgersystems mit vier Trägern und Nebensprechen zwischen benachbarten Teilbändern

zur Erzeugung der Teilbänder (DMT, Discrete wavelet multi-tone (DWMT)) ab.

Obwohl  $\tilde{\mathbf{H}}(f)$  bei praktischen Systemen, die mit 256 und mehr Trägern arbeiten, sehr groß werden kann, ist sie erfahrungsgemäß doch nur in der Hauptdiagonalen und zwei Nebendiagonalen überhaupt besetzt, so dass sie durchaus numerisch effizient zu handhaben ist. Für das Beispiel von Bild 3.17 lautet die Matrix:

$$\tilde{\mathbf{H}}(f) = \begin{pmatrix} H_{11}(f) & H_{12}(f) & 0 & 0 \\ H_{21}(f) & H_{22}(f) & H_{23}(f) & 0 \\ 0 & H_{32}(f) & H_{33}(f) & H_{34}(f) \\ 0 & 0 & H_{43}(f) & H_{44}(f) \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Die Anzahl von Null verschiedener Elemente für ein System mit  $N$  Teilbändern beträgt offensichtlich  $3N - 2$ .

Bislang haben wir nicht berücksichtigt, dass üblicherweise in jedem Teilband mit Ausnahme des Basisbandes ein Inphase- und ein Quadratursignal übertragen werden. Es ist allerdings in einfacher Weise möglich, die in 3.4.1 entwickelte Bandpassdarstellung in Matrizenform in die Darstellung gemäß Bild 3.17 bzw. Gleichung (3.48) einzubauen. Dazu muß zum einen jede der Übertragungsfunktionen  $H_{ii}(f)$  in Gleichung (3.48) durch die entsprechende  $2 \times 2$ -Matrix aus Gleichung (3.45) auf Seite 46 ersetzt werden. Zum anderen wer-

### 3.4 Modellierung des Übertragungsverfahrens

den die Übertragungsfunktionen auf der Nebendiagonalen durch entsprechende  $2 \times 2$ -Matrizen ersetzt, die das paarweise Übersprechen von Inphase- und Quadraturanteil benachbarter Teilbänder beschreiben. Das bei  $f = 0$  liegende Teilband kann natürlich kein zweidimensionales Signal (d. h. mit Inphase- und Quadraturanteil) aufnehmen, so dass wir es für dieses Teilband bei der skalaren Beschreibung belassen können.

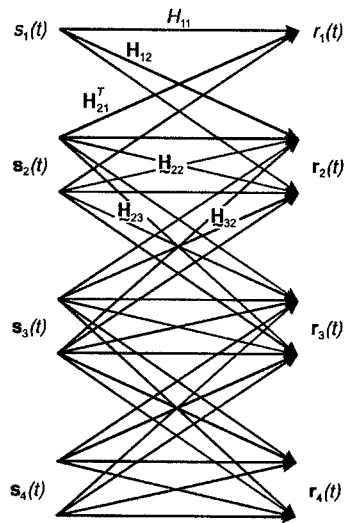


Abbildung 3.18: Erweiterung des Mehrträgersystems auf zweidimensionale Übertragung (mit Inphase- und Quadraturanteil) in den Bandpass-Teilbändern

Wird zur Erzeugung der Teilbänder FFT oder Diskrete Wavelet-Transformation (DWT) verwendet, muß aus Symmetriegründen das höchstfrequente Teilband ebenfalls eindimensional besetzt werden. Diese Forderung ergibt sich jedoch aus der konkreten technischen Erzeugung der Teilbänder und nicht aus systemtheoretischer Notwendigkeit, so dass wir in diesem Beispiel dem allgemeinen Fall folgen.

Diesen Überlegungen entsprechend ergibt sich folgender Aufbau der Matrix:

### 3 MIMO-Struktur des OAsL-Netzcs

$$\begin{pmatrix} H_{11}(f) & \begin{bmatrix} H_{12}(f) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} H_{21}^T(f) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tilde{H}_{22}(f) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tilde{H}_{23}(f) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \sim \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tilde{H}_{32}(f) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} H_{33}(f) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tilde{H}_{34}(f) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \sim \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tilde{H}_{43}(f) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tilde{H}_{44}(f) \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Auch in diesem Fall ist die zugehörige Matrix – vor allem bei größeren Systemen – dünn besetzt und entsprechend einfach zu handhaben. Bild 3.18 zeigt den resultierenden Graphen, der auch noch einmal die Bedeutung der Elemente der Matrix (3.49) verdeutlicht.

#### 3.4.3 Zusammenfassung

Damit können wir die eingangs gestellten Fragen beantworten:

- Die Tiefpassdarstellung im äquivalenten Basisband hat sich für unsere Zwecke als nicht besonders geeignet erwiesen. Die Bandpassdarstellung mit Vektoren für Signale und Matrizen für Systeme hat den Vorteil, dass Nutz- und Übersprechanteil einfach zu identifizieren sind. Aufgrund des Isomorphismus zwischen der Rechnung mit komplexen Zahlen und schiefssymmetrischer  $2 \times 2$ -Matrizen gelten alle Gesetze der Tiefpassdarstellung unverändert.

In der Hauptdiagonale der Übertragungsmatrix stehen dabei die Übertragungsfunktionen im Nutzsignalpfad, die restlichen Elemente beschreiben das Übersprechen von Inphase- auf Quadraturkomponente und andersherum.

- Diese Darstellung läßt sich in einfachster Weise auf Mehrträgersysteme erweitern. Dabei läßt sich eine hierarchische „top-down“-Modellierung anwenden: Zunächst wird eine Matrix aufgestellt, welche die Struktur



---

### 3.4 Modellierung des Übertragungsverfahrens

des Mehrträgersystems beschreibt, d.h. die Anzahl der Spalten oder Zeilen entspricht der Anzahl der Teilbänder. Danach werden diejenigen Elemente, die Teilbänder mit zweidimensionaler Übertragung (also Inphase- und Quadraturanteil) repräsentieren, wiederum durch Matrizen ersetzt.

- Ganz entsprechend ergibt sich die Verträglichkeit mit der Modellierung der Übertragungsstrecke gemäß Abschnitt 3.2. Jedes Element auf der Hauptdiagonalen der die Übertragungsstrecke beschreibenden Matrix wird durch die vorstehend diskutierte Übertragungsmatrix ersetzt. Die übrigen Elemente beschreiben wiederum das Übersprechen zwischen einzelnen Systemen und werden in den meisten Fällen mit der jeweiligen Nebensprechübertragungsfunktion des Kabels gewichtete Einsmatrizen passender Dimension oder Nullmatrizen sein.

In der Praxis wird die Übertragungsmatrix bei größeren Kabelbündeln und insbesondere bei Vielträgersystemen leicht sehr groß. Da jedoch häufig viele Nebensprechbeziehungen gegenüber wenigen, dominanten Nebensprechern vernachlässigt werden können, ist sie in aller Regel sehr dünn besetzt. Für die numerische Auswertung stellt dies somit kein wesentliches Hindernis dar.

---

### 3 MIMO-Struktur des OAsL-Netzes

---

## 4 Übertragungssysteme für mehrere Quellen, mehrere Sinken und einen MIMO-Kanal

Während der Schwerpunkt von Kapitel 3 auf der adäquaten mathematischen Beschreibung des *Kabelbündels* im Ortsanschlußleitungsnetz (OAsL-Netz) als MIMO-Übertragungskanal für alle angeschalteten Übertragungs-Subsysteme lag, gilt dieses Kapitel der passenden Formulierung von Sende- und Empfangsverfahren. Neben einer kurzen Rekapitulation der bekannten Verfahren (PAM, CAP, DMT) ist vor allem die Formulierung dieser Verfahren für MIMO-Systeme von Interesse. Erst diese Formulierung wird später die Optimierung der Übertragung für den maximalen Kontext (vgl. hierzu Abschnitt 3.1.3 auf Seite 29) und die Angabe von Verlusten aufgrund der Einschränkung des Kontexts ermöglichen.

### 4.1 Klassische und MIMO-Sicht des Übertragungsproblems

Alle Übertragungssysteme dienen – neben der Mehrung des ökonomischen Wohlergehens des Betreibers<sup>1</sup> – vor allem dem Zweck, Nachrichten von einer Quelle auf der einen Seite zu einer Sinke auf der anderen Seite zu übertragen, und das möglichst störungsarm. Das spezielle Umfeld des Ortsanschlußleitungsnetzes ist dadurch charakterisiert, dass eine Vielzahl von Nachrichten

<sup>1</sup>Obwohl nicht-technischer Natur, sei diese Bemerkung hier gestattet, da viele technische Entscheidungen bis zum Zustandekommen eines Standards überhaupt nur vor diesem Hintergrund verständlich sind.

#### 4 Übertragungssysteme für den MIMO-Kanal

unabhängig voneinander von  $N_Q$  Quellen zu ebenfalls  $N_Q$  Senken übertragen werden soll, vgl. Abb. 4.1.

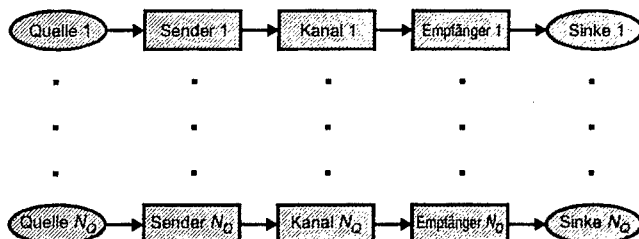


Abbildung 4.1: Die (fast) ideale Vorstellung der Nachrichtenübertragung: Für  $N_Q$  Verbindungen von Quellen zu Senken stehen  $N_Q$  getrennte Kanäle zur Verfügung. Es gibt keine gegenseitige Beeinflussung.

Die Realität macht diesem hehren Zweck insofern einen ersten Strich durch die Rechnung, als sich die elektrischen Signale, welche die Nachrichten über ein gemeinsames Kabel transportieren, sehr wohl gegenseitig beeinflussen. Die systemtheoretische Modellierung dieser Beeinflussung führt zum MIMO-Kanal (Abb. 4.2).

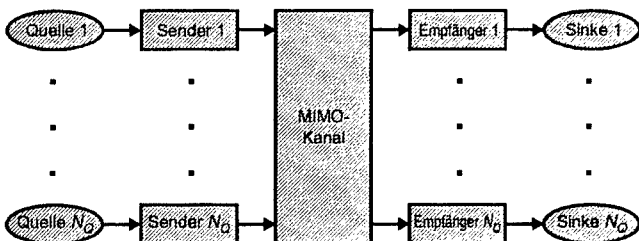


Abbildung 4.2: Systemtheoretische Modellierung der gegenseitigen Beeinflussung im Kanal: der MIMO-Kanal. Nach wie vor werden Sender und Empfänger jedoch „je System“ dimensioniert, die Nachbarn im Kabel werden als Störer angesehen.

Abbildung 4.2 stellt die heute beim Systementwurf und in den Standardisierungsgremien übliche Sichtweise dar. Sie läßt sich folgendermaßen charakteri-

#### 4.1 Klassische und MIMO-Sicht des Übertragungsproblems

sieren:

- Betrachtet (d. h. dimensioniert, optimiert, untersucht) wird *ein* bestimmtes Übertragungssystem der  $N_Q$  am Kabelbündel angeschlossenen.
- Alle  $N_Q - 1$  anderen Systeme werden als Störer betrachtet.
- Das betrachtete System wird hinsichtlich Transinformation oder Reichweite optimiert. Auswirkungen auf die anderen  $N_Q - 1$  Systeme werden nur pauschal, z. B. durch Begrenzung der Sendeleistung oder der genutzten Bandbreite, berücksichtigt.

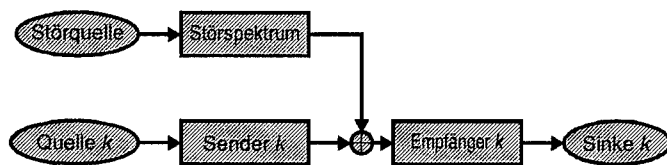


Abbildung 4.3: Das Ergebnis konsequenter Vereinfachung: Nur das betrachtete System wird vollständig modelliert, alle anderen Systeme werden zu einer einzigen, stationären Störquelle zusammengefaßt.

Die Betrachtung aller anderen Systeme als in ihren Eigenschaften konstante, stationäre Störung führt natürlich zu einem sehr einfachen Modell (Abb. 4.3).

Diese vereinfachte Betrachtungsweise führt nur unter zwei Voraussetzungen zu brauchbaren (wenngleich auch keinesfalls optimalen) Ergebnissen:

1. Das Problem ist völlig symmetrisch. Das heißt, das Kabel ist mit lauter identischen Systemen beschaltet, und alle gegenseitigen Beeinflussungen sind identisch. Dann kann ein beliebiges System als Stellvertreter betrachtet und der Einfluss aller anderen als Summenstörung modelliert werden.
2. Alle instationären Vorgänge laufen in allen Systemen völlig synchron ab. Nur dann gelten für jedes System zu jedem Zeitpunkt völlig identische Bedingungen.

#### 4 Übertragungssysteme für den MIMO-Kanal

Beide Voraussetzungen sind in der Praxis offensichtlich nicht erfüllt. Voraussetzung 1 scheitert schon alleine daran, dass ein Kabel de facto niemals vollständig mit identischen Systemen beschaltet ist. Darüberhinaus unterliegt die Nebensprechdämpfung zwischen vergleichbar gelagerten Adernpaaren selbst innerhalb eines Kabelbündels beträchtlichen Schwankungen. Auch die Annahme der Synchronizität (Voraussetzung 2) lässt sich nicht halten: Heute eingesetzte und für die nahe Zukunft geplante Systeme werden mit lokalem Takt betrieben.

Zur Lösung dieses Problems kommen wir wieder zur ursprünglichen Aufgabenstellung zurück: Nachrichtenübertragung von  $N_Q$  Quellen zu einer entsprechenden Anzahl von Senken. Steht dafür ein Kabelbündel mit  $N_K$  Adernpaaren zur Verfügung – und sehen wir für den Augenblick von technischen Randbedingungen ab – so steht es uns frei, von diesen  $N_K$  Adernpaaren  $N_S \leq N_K$  Adernpaare für die Übertragung zu nutzen. Dabei ist  $N_S$  keinesfalls notwendigerweise gleich  $N_Q$ . Sinnvoll hingegen erscheint es, an den Empfänger zumindest alle Adernpaare, auf denen gesendet wird, auch anzuschließen, so dass für die Anzahl  $N_R$  der empfängerseitig beschalteten Adernpaare zunächst gilt:  $N_R \geq N_S$ . Eine beliebige Verteilung des zu übertragenden Informationsflusses auf die  $N_S$  Adernpaare erfordert einen gemeinsamen Sender, an den alle  $N_Q$  Quellen angeschlossen sind. Abbildung 4.4 illustriert diesen Ansatz.

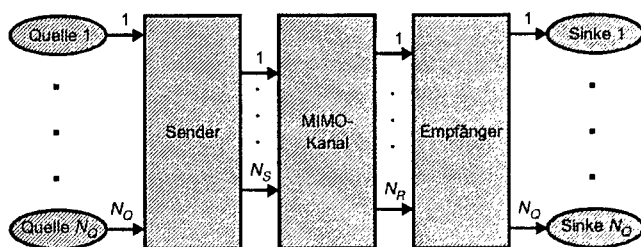


Abbildung 4.4: Korrektes Modell zur Optimierung von Übertragungssystemen für einen MIMO-Kanal.

Die folgenden Abschnitte widmen sich der allgemeinen, mathematischen Beschreibung des Informationstransports von der Datenquelle über den Sender des Übertragungssystems, den Kanal, den Empfänger bis hin zur Senke.

## 4.2 Von der Quelle bis zur diskreten Sendesymbolfolge

Die Aufgabe des gesamten Senders ist die bijektive Zuordnung eines elektrischen Signals – das schließlich über die Leitung „gesendet“ wird – zur Folge der zu sendenden Quellsymbole. Der Blickwinkel dieses Abschnitts endet an jenem Punkt, wo aus einer zeit- und wertdiskreten Folge von Sendesymbolen durch Interpolation (d. h. i. a. Filterung mit dem Sendeimpulsformer) ein analoges Signal entsteht.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wollen wir die Datenquelle im folgenden als *binär* voraussetzen. Der zeitliche Abstand zweier binärer Quellsymbole sei konstant und betrage  $T_q$ , was einer *Bitrate* der Quelle  $R_q = 1/T_q$  entspricht. Gängige Beschreibungsformen, insbesondere für die codierte Übertragung, setzen die *statistische Unabhängigkeit* aufeinanderfolgender Quellsymbole voraus. Folglich fordern wir die Redundanzfreiheit der Quelle, d. h. die Quelle gebe Information mit einer Entropie von 1 bit pro Symbol ab.

Dies ist keine wesentliche Einschränkung für die Praxis, da reale Quellen mit nachgeschalteten Block-Interleavern oder Scramblern dieser Forderung meist ausreichend nahe kommen. Es sei aber betont, dass die Gültigkeit der Annahme für jede Kombination aus realer Quelle und gewähltem Codiervorgang verifiziert werden muß.

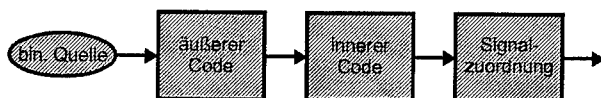


Abbildung 4.5: Schematische Darstellung der Funktionseinheiten des diskreten Teils des Senders mit idealer Quelle.

Der Sender selbst zerfällt in einen diskreten (hier: zeit- und wertdiskreten) und einen analogen (zeit- und wertkontinuierlichen) Teil. Die wichtigsten Funktionen des diskreten Teils sind in Abb. 4.5 wiedergegeben.

**Äußerer Code** Als äußerer Code findet meistens ein Blockcode – oft ein Reed-Solomon-Code (RS-Code), siehe z. B. [Bla83] – Verwendung. Im hier be-

#### 4 Übertragungssysteme für den MIMO-Kanal

trachteten Umfeld fallen ihm im wesentlichen zwei Aufgaben zu:

- die Reduzierung der Fehlerrate des „inneren Systems“ auf die vom zu übertragenden Dienst geforderte maximal zulässige Restfehlerwahrscheinlichkeit, und
- die Eliminierung von Bündelfehlern als Folge von Impulsstörungen.

Dabei sei angemerkt, dass die Redundanz eines RS-Codes *immer* zu Lasten der Systembandbreite (bzw. der nutzbaren Bitrate) geht. Dies ist vor allem für erste Zielsetzung von Bedeutung, da die erreichbare Reduzierung der Restfehlerrate unmittelbar mit der für die Codierung aufgewendeten Redundanz zusammenhängt. Eine erfolgreiche Korrektur von Bündelfehlern hingegen ist vorwiegend abhängig von der *Einflusslänge* des Codes. Da der zeitliche Abstand von Bündelfehlern im Verhältnis zu ihrer Dauer sehr groß ist, würde zu ihrer Korrektur ein sehr hochratiger Code in Verbindung mit einem Interleaver mit ausreichend großem Gedächtnis ausreichen.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass Eingang und Ausgang des äußeren Coders binär sind<sup>2</sup>. Mit der Coderate  $r_c$  des äußeren Codes ergibt sich am Ausgang des äußeren Coders ein Symbolabstand

$$T_c = r_c T_q. \quad (4.1)$$

Da die Schnittstelle zwischen dem äußeren Code und den nachfolgenden Komponenten des Senders rein binär ist, richtet sich seine Auswahl und Dimensionierung im wesentlichen nach der Bitfehlerstatistik am Eingang des entsprechenden Decoders für den äußeren Code im Empfänger. Eine Anpassung an das verwendete Modulationsverfahren, die Signalkonstellation oder Kanaleigenschaften wird hier nicht vorgenommen.

**Innerer Code und Signalzuordnung** dienen zusammen der Fehlersicherung und müssen folglich auch gemeinsam dimensioniert werden. Die Signalzuordnung ordnet jedem Symbol des eingangsseitigen Symbolvorrats  $\Omega_b$  einen

<sup>2</sup>Falls ein RS-Code als äußerer Code Verwendung findet, impliziert dies die Verwendung eines ein- und ausgangsseitigen gedächtnislosen Alphabet-Mappers.



#### 4.2 Von der Quelle bis zur diskreten Sendesymbolfolge

Punkt  $a$  aus dem  $n_a$ -dimensionalen Signalraum  $\mathbb{R}^{n_a}$  zu. Die Menge aller möglichen, d. h. einem eingangsseitigen Symbol  $b$  entsprechenden Signalpunkte heißt *Signalkonstellation*  $A$ .

Als innerer Code findet häufig ein Faltungscodes Verwendung, der zusammen mit einer geeignet *partitionierten* Signalkonstellation einen Trelliscodes bildet [Ung82, For88, For89]. Alternativ, wenn auch noch nicht im technischen Einsatz befindlich, wäre hier die Verwendung eines Multilevel-Codes [IH77] möglich und aufgrund neuerer Ergebnisse [Hub94] auch interessant. Aufgrund der technischen Relevanz gelten die nachfolgenden Ausführungen zunächst für Trelliscodes.

Das wesentliche Merkmal des inneren Codes ist, dass die zur Fehlersicherung erforderliche Redundanz durch eine größere Mächtigkeit der Signalkonstellation bereitgestellt wird<sup>3</sup>.

Der Coder des inneren Codes operiert eingangsseitig auf Vektoren

$$\mathbf{c} \in GF^{n_c}(2),$$

bestehend aus jeweils  $n_c$  Ausgangsbits  $c$  des äußeren Codes. Abbildung 4.6 verdeutlicht dies. Die Redundanz wird durch eine höhere Dimension  $n_b$  des Ausgangsvektors  $\mathbf{b}$  im Vergleich zu jener ( $n_c$ ) des Eingangsvektors  $\mathbf{c}$  eingebracht. Mit der Coderate  $r_b$  (häufig wird  $r_b = n_c/(n_c + 1)$  gewählt) gilt am Ausgang des Coders:

$$\mathbf{b} \in GF^{n_b}(2), n_c = r_b n_b.$$

Die Signalzuordnung bildet jeden Vektor  $\mathbf{b}$  auf einen Signalpunkt  $\mathbf{a}$  aus dem  $n_a$ -dimensionalen euklidischen Raum ab (vgl. Abb. 4.6). Jede Koordinate von  $\mathbf{a}$  dient als Gewicht für einen, das entsprechende Sendefilter anregenden Dirac-Impuls. Die Dimension der Signalkonstellation  $n_a$  und jene des Modulationsverfahrens  $n_s$  müssen nicht notwendigerweise identisch sein. So können z. B. die vier Koordinaten eines Punktes einer vierdimensionalen Konstellation mit einem zweidimensionalen Modulationsverfahren (etwa QAM) in zwei zeitlich aufeinanderfolgenden Modulationsschritten übertragen werden.

<sup>3</sup> ... und nicht, wie beim äußeren Code, durch eine Verkürzung des Symbolabstands.

#### 4 Übertragungssysteme für den MIMO-Kanal

Die Dauer eines Modulationsschrittes (Sendesymboldauer)  $T_s$  hängt folglich ab vom Verhältnis der Dimensionen des Signalraums und des Modulationsverfahrens, von der Coderate  $r_c$  des *äußeren* Codes und der Wortbreite  $n_c$  am Eingang des inneren Codes, nicht jedoch von der Coderate  $r_b$  des inneren Codes:

$$T_s = \frac{n_s}{n_a} n_c r_c T_q \quad (4.2)$$

Dabei ist

- $T_q$  der Bittakt der (binären) Quelle,
- $T_s$  die Modulationsschrittdauer (Sendesymbolabstand),
- $n_a$  die Dimension des Signalraums,
- $n_s$  die Dimension des Modulationsverfahrens,
- $n_c$  die Wortlänge am Eingang des (inneren) Trelliscoders,
- $r_c$  die Coderate des äußeren Codes.

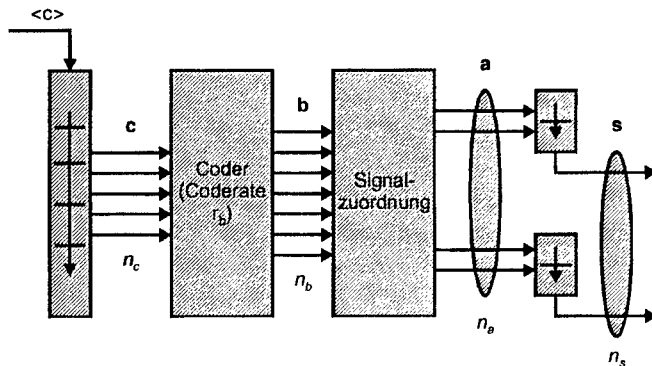


Abbildung 4.6: Innerer Code und Signalzuordnung. Parallele Pfeile symbolisieren Vektoren.

### 4.3 Von der Entstehung des analogen Sendesignals bis zum Eingang des Empfängers

Am Ausgang der – der Signalzuordnung nachgeschalteten – Parallel-/Seriell-Wandler steht nun je Modulationsschritt und je Dimension des Modulationsverfahrens ein *Amplitudenkoeffizient*  $s_{\mu,i}$  zur Verfügung. Dabei bezeichnet der erste Index  $\mu \in \mathbb{Z}$  den Modulationsschritt (im Sinne einer diskreten Zeit), während der zweite Index  $i = 0 \dots n_s - 1$  die Dimensionen des Modulationsverfahrens durchzählt.

**Unmoduliertes Sendesignal** Die Folge von Amplitudenkoeffizienten dient zur Gewichtung eines periodischen Dirac-Pulses, der das Sendefilter anregt. Damit ergibt sich für die  $i$ -te Komponente des analogen, unmodulierten Sendesignals:

$$s_i(t) = h_s(t) * \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} s_{\mu,i} \delta(t - \mu T_s - T_{o,i}) \quad (4.3)$$

Das Sendefilter wird dabei durch seine Impulsantwort  $h_{U_s}(t)$  beschrieben. Der Begriff *unmoduliert* ist nicht mit Basisband- oder Tiefpass-Charakteristik zu verwechseln, da z. B. bei CAP die Sendefilter Bandpassverhalten zeigen.

Eine zusätzliche Verschiebung des Dirac-Pulses um  $T_{o,i}$  ermöglicht z. B. die Modellierung von Offset-QPSK (hier wäre  $n_s = 2$ ,  $T_o = (0, T_s/2)$ ).

Transformieren wir Gleichung (4.3) in den Frequenzbereich, erhalten wir

$$S_i(f) = H_s(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_i(f) e^{j2\pi f T_{o,i}} \quad (4.4)$$

**Modulation und Demodulation** Eine analoge Modulation des unmodulierten Sendesignals wird bei der drahtgebundenen Übertragung im OAsL-Netz meistens vermieden. Gründe dafür sind:

- Der Übertragungskanal zeigt ausgesprochenes Tiefpassverhalten.

#### 4 Übertragungssysteme für den MIMO-Kanal

- Analoge Modulation erfordert zusätzliche Maßnahmen zur Trägersynchronisation im Empfänger.
- Bandpass-Sendesignale im relevanten Frequenzbereich können technisch günstiger durch CAP- oder DMT-Verfahren erzeugt werden.

Lediglich bei Prototypen sehr hochratiger Systeme, deren Symbolrate oder Frequenzbereich die Möglichkeiten digitaler Verarbeitung im Bandpassbereich sprengt, wird bei Frequenz-Getrenntlage Quadrature amplitude modulation (QAM) für das obere Band eingesetzt.

**Verzerrungen und Störungen** Das gesendete Signal  $s(t)$  wird auf dem Weg zum Empfänger *linear* und *nichtlinear* verzerrt und von additiven Störungen überlagert.

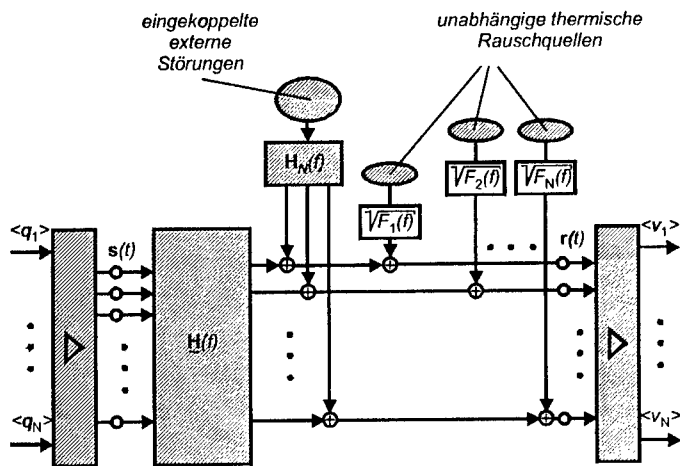


Abbildung 4.7: Externe Störungen und ihre Wirkung

**Lineare Verzerrungen** werden durch den Dämpfungs- und Phasengang des Kanals verursacht. Sie werden durch die Hauptdiagonalelemente der Übertragungsmatrix (vgl. Abschnitt 3.3.1) beschrieben.

#### 4.4 Vom Empfängereingang bis zum decodierten Sinkensignal

**Nichtlineare Verzerrungen** werden z.B. durch nichtlineare Verstärkerkennlinien oder das Hystereseverhalten von Ferritkernen in Übertragern verursacht. Das Maß der Beeinträchtigung der Übertragung durch diese nichtlinearen Verzerrungen ist nach Kenntnis des Autors bis heute noch nicht eingehend untersucht worden. Generell werden nichtlineare Verzerrungen bei der Dimensionierung von OAsL-Übertragungseinrichtungen zur Zeit nicht berücksichtigt. Die Frage, ob dies zulässig ist, muß als offen betrachtet werden.

Die Analyse und Betrachtung nichtlinearer Verzerrungen ist nicht Gegenstand dieser Arbeit und würde deren Rahmen auch bei weitem sprengen.

**Störungen** Klassifizierung (Abschnitt 3.2.2) von Störungen, ihre Entstehung (Abschnitte 3.2.3, 3.2.4) und ihre mathematische Darstellung im Zusammenhang eines MIMO-Systems (vgl. Abschnitt 3.3.1 und Abb. 3.13 auf Seite 41) wurden bereits im vorangegangenen Kapitel diskutiert. Die Einordnung externer Störungen in den betrachteten Kontext ist in Abb. 4.7 zusammenfassend dargestellt.

#### 4.4 Vom Empfängereingang bis zum decodierten Sinkensignal

Die Aufgabe des Empfängers besteht darin, aus dem verzerrten und mit stochastischen Störanteilen überlagerten Empfangssignal die darin enthaltene Nachricht mit möglichst wenig Fehlern wiederzugewinnen. Im allgemeinen beinhaltet dies die Teilaufgaben

- Alias-Unterdrückung und Abtastung,
- Kanalverzerrung,
- Impulsformung, Störunterdrückung und Abtastung im Symboltakt,
- Detektion der Codesymbole, und
- Decodierung von innerem und äußerem Code.

#### 4 Übertragungssysteme für den MIMO-Kanal

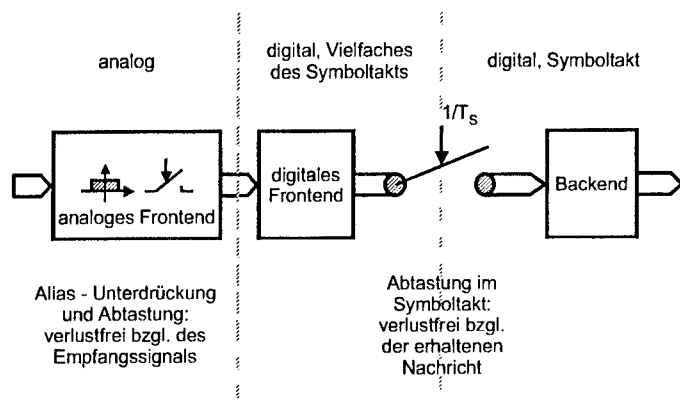


Abbildung 4.8: Gliederung des Empfängers in analoges Frontend, digitales Frontend und (digitales) Backend durch Abtastung.

Die für die Wahl der mathematischen Beschreibung des Empfängers wesentlichen Schnittstellen sind die Abtastung und Digitalisierung des analogen Eingangssignals, und im weiteren Signalverlauf die Abtastung im Symboltakt. Diese Schnittstellen und die durch sie gegebene Gliederung des Empfängers in *analoges Frontend*, *digitales Frontend* und *Backend* sind in Abb. 4.8 illustriert.

Systemtheoretisch wesentlich ist hierbei die Abtastung im Symboltakt, die bei korrekter Dimensionierung des Frontends die volle, zur Wiedergewinnung der Nachricht erforderliche Information im Sinne von *sufficient statistics* erhält [For72].

Die Aufteilung in analoges und digitales Frontend und damit die Einführung einer, im Signalverlauf *vor* der Abtastung im Symboltakt liegenden, weiteren Abtastung ist technisch begründet. Sie ermöglicht es, einen wesentlichen Teil des Empfänger-Frontends digital zu realisieren und damit den Möglichkeiten der digitalen Signalverarbeitung (Genauigkeit, Konstanz, Adaption) zugänglich zu machen. Insbesondere sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass sowohl der sog. Fractionally-spaced Equalizer (FSE) für Basisbandübertragung [Luc69, GW81] als auch die Vorwärtsfilter eines CAP-Empfängers [Wer92, Wer93, Fal76] *theoretisch* analog sein könnten, aus technischen Grün-

#### 4.4 Vom Empfängereingang bis zum decodierten Sinkensignal

den aber ausschließlich eine digitale Realisierung infrage kommt. Angesichts der Ambivalenz von theoretischer und technischer Erfordernis werden wir bei der Beschreibung des Frontends wie folgt verfahren:

- Ungeachtet der technischen Realisierung werden Filter, die im Signalfluss vor der Abtastung im Symboltakt liegen, grundsätzlich analog beschrieben (z. B.  $H_E(f)$ ), solange für den jeweiligen Zweck die analoge Beschreibung keine wesentlichen Einflüsse auf das Ergebnis hat.
- Wenn ganz speziell Auswirkungen der digitalen Realisierung des Frontends untersucht werden sollen, behalten wir alle Funktionsbezeichner von Filtern und Signalen bei. Zur Kennzeichnung der digitalen Betrachtungsweise wird die Frequenzvariable  $f$  durch  $D^{r_S}$  ersetzt, wobei  $r_S = T_S/T_A$  das (i. a. ganzzahlige<sup>4</sup>) Verhältnis von Abtast- und Symboltakt ist. Zum Beispiel wird aus dem analog beschriebenen Empfangsfilter  $H_E(f)$  damit  $H_E(D^{r_S})$ .
- Die Symbolik in Blockschaltbildern wird an der jeweils verwendeten Beschreibungform ausgerichtet. Tabelle 4.2 auf der nächsten Seite faßt die verwendeten Symbole und deren Bedeutung zusammen.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, dass wir die nur technisch relevante Abtastung sowohl in der mathematischen Beschreibung als auch in der Symbolik immer dann ignorieren werden, wenn ihre Wirkung für den jeweiligen Zweck irrelevant ist.

##### 4.4.1 Das Empfänger-Frontend

Die Aufgabe des Empfänger-Frontends besteht darin, das Empfangssignal so aufzubereiten, dass das zeitdiskrete Eingangssignal des Backends (im Symboltakt) eine hinreichende Statistik (*engl.*: sufficient statistics) bzgl. der im Empfangssignal enthaltenen Information darstellt.

<sup>4</sup>Im Grunde kann  $r_S$  unter Einhaltung des Abtasttheorems jeden beliebigen, auch nicht ganzzahligen oder nicht gebrochen rationalen Wert haben. Allerdings ist in diesen Fällen für den Übergang zum Symboltakt am Eingang des Backends eine vollständige  $\sin(x)/x$ -Interpolation erforderlich (zu deren geschickten Realisierung siehe z. B. [Smi94]), während bei ganzzahligem  $r_S$  einfache Dezimierung genügt (z. B. [MK93]).

Tabelle 4.2: Systemtheoretisch relevante Abtastung, technisch relevante Abtastung und Downsampling

	<p><b>Technisch relevante Abtastung</b></p> <p>Anti-Alias-Filterung und Abtastung gemäß dem Abtasttheorem mit einem Abtasttakt <math>1/T_A &gt; 1/T_S</math>. Der danach folgende Signalpfad wird bis zur Abtastung im Symboltakt analog beschrieben. Wenn keine Verwechslungsgefahr gegeben ist, wird auf die Verwendung dieses Symbols auch ganz verzichtet.</p>
	<p><b>Systemtheoretisch relevante Abtastung</b></p> <p>Die exakte Beschreibung dieser Abtastung ist für den angestrebten Zweck notwendig. Der nachfolgende Signalpfad wird zeitdiskret beschrieben.</p>
	<p><b>Dezimierung (Downsampling)</b></p> <p>Wenn das digitale Frontend bereits zeitdiskret beschrieben wurde, wird der Schritt zum Symboltakt durch <i>Downsampling</i> vollzogen, d. h. nur jeder <math>r_s</math>-te Abtastwert am Ausgang des digitalen Frontends wird vom Backend tatsächlich verwendet.</p>

Nach Forney [For72] wird das optimale Frontend für SISO-Systeme bei stationärer Gauß'scher Störung und mit einem Maximum-likelihood Sequence Estimation (MLSE)-Backend durch das Whitened Matched Filter (WMF) beschrieben. Generell zeigte Forney, dass *jede* Kaskade aus *Matched Filter*, Abtastung im Symboltakt und einem *invertierbaren* zeitdiskreten Filter  $f(D)$  am Ausgang eine Sequenz mit hinreichender Statistik in obigem Sinne liefert. Gemäß der hier verwendeten Nomenklatur besteht das *Frontend* in diesem Falle aus einem Matched Filter.

Die Diskussion des *optimalen* Frontends eines MIMO-Systems verschieben wir auf die folgenden Kapitel und stellen hier lediglich fest, dass es durch ein



#### 4.4 Vom Empfängerereingang bis zum decodierten Sinkensignal

zeitkontinuierliches Matrix-Filter  $\mathbf{H}_E(f)$  beschrieben wird. Aus dem analogen Vektor-Eingangssignal  $\mathbf{r}(t)$  entsteht somit durch Filterung und Abtastung eine Sequenz

$$\mathbf{d}_E(D) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \mathbf{r}(t) * \tilde{\mathbf{h}}_E(t) \Big|_{t=\mu T_S=0} D^\mu \quad (4.5)$$

von vektoriellen Abtastwerten  $\mathbf{d}_{E,\mu}$  im Symbolabstand. Die Abtastung wird hier stets als optimal bzgl. des Abtastzeitpunktes vorausgesetzt.

##### 4.4.2 Das Empfänger-Backend

Die Aufgabe des Empfänger-Backends ist es, aus der im Symboltakt zeitdiskreten Sequenz  $\mathbf{d}_E(D)$  eine Schätzung  $\langle \mathbf{q}_\mu \rangle$  für die gesendete Nachricht  $\langle \mathbf{q}_\mu \rangle$  zu gewinnen.

##### Maximum-a-posteriori Einzelsymbolschätzung

Als Optimierungsziel für das Backend wird generell angesehen, die mittlere Fehlerwahrscheinlichkeit  $P(v_{i,\mu} \neq q_{i,\mu} | \mathbf{d}_E(D))$  für ein im Vergleich zum entsprechenden Quellensymbol  $q_{i,\mu}$ <sup>5</sup> falsch geschätztes Sinkensymbol  $v_{i,\mu}$  zu minimieren; engl.: Maximum a-posteriori single-symbol estimation (MAPSSE). Äquivalent zur Minimierung der mittleren Fehlerwahrscheinlichkeit ist die Maximierung des komplementären Ausdrucks gemäß<sup>6</sup>

$$v_{i,\mu} = \arg \max_{v_i^{(k)} \in \Omega_v} \left\{ P \left( v_i^{(k)} = q_{i,\mu} | \mathbf{d}_E(D) \right) \right\}, \quad (4.6)$$

wobei die Maximierung über alle Elemente  $v_i^{(k)}$  des Sinkenalphabets  $\Omega_v$  durchzuführen ist. Dabei ist anzumerken, dass diese Empfängerregel

<sup>5</sup>Gemäß der in Abschnitt 3.1 auf Seite 19 eingeführten Konvention bezeichnet der erste Index die Komponente des Vektors, der zweite die diskrete Zeit.

<sup>6</sup>Zur Notation: Der Exponent in Klammern  $(k)$  zählt alle Elemente einer Menge durch, während der zweite tiefgestellte Index  $\mu$  zeitlich die Glieder einer Sequenz numeriert. Der erste tiefgestellte Index  $i$  bezeichnet wie immer die Komponente eines Vektors.

#### 4 Übertragungssysteme für den MIMO-Kanal

- die Detektionssicherheit jedes *einzelnen* Symbols maximiert (*engl.*: single symbol estimation),
- die *gesamte* Sequenz  $\mathbf{d}_E(D)$  als Eingangsgröße benötigt wird, und,
- wie man nach Umformung von (4.6)

$$P(v_i^{(k)} = q_{i,\mu} | \mathbf{d}_E(D)) = \frac{P(\mathbf{d}_E(D) | v_i^{(k)} = q_{i,\mu}) P(q_{i,\mu})}{P(\mathbf{d}_E(D))}$$

leicht erkennt, die a-priori-Wahrscheinlichkeit der Quellensymbole berücksichtigt.

#### Maximum-a-posteriori Sequenzschätzung

Ein methodisch verschiedener Ansatz ist es, die Detektionssicherheit für die *gesamte* Nachricht, also die vollständige Sequenz von Sinkensymbolen, zum Optimierungsziel zu machen, *engl.*: Maximum a-posteriori sequence estimation (MAPSE). Entsprechend Gleichung (4.6) lautet die Empfängerregel für die Sequenzschätzung:

$$\langle \mathbf{v}_\mu \rangle = \arg \max_{\langle \mathbf{v}_\mu \rangle^{(k)} \in (\Omega_v)^\infty} \{ P(\langle \mathbf{v}_\mu \rangle^{(k)} = \langle \mathbf{q}_\mu \rangle | \mathbf{d}_E(D)) \} \quad (4.7)$$

Die Maximierung wird hier über die (unendlich mächtige) Menge aller möglichen Sinkensymbolfolgen durchgeführt.

#### Maximum-likelihood Sequenzschätzung

Sowohl Maximum a-posteriori single-symbol estimation (MAPSSE) als auch Maximum a-posteriori sequence estimation (MAPSE) berücksichtigen (evtl. unterschiedliche) Wahrscheinlichkeiten von Quellensymbolen bzw. Quellensymbolfolgen. Sind diese *a-priori-Wahrscheinlichkeiten* alle gleich, oder werden deren Unterschiede bewußt vernachlässigt, gelangt man im Falle der Sequenzschätzung zur Maximum-likelihood Sequence Estimation (MLSE)-Empfängerregel:

$$\langle \mathbf{v}_\mu \rangle = \arg \max_{\langle \mathbf{v}_\mu \rangle^{(k)} \in (\Omega_v)^\infty} \{ P(\mathbf{d}_E(D) | \langle \mathbf{v}_\mu \rangle^{(k)}) \} \quad (4.8)$$

#### 4.4 Vom Empfängereingang bis zum decodierten Sinkensignal

Die technische Bedeutung dieser Empfängerregel ist auf zwei Ursachen zurückzuführen:

1. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $P(d_E(D) | \langle v_\mu \rangle^{(k)})$  folgen unmittelbar aus der Kanalstatistik, und
2. es steht mit dem Viterbi-Algorithmus [Vit67, For73] ein technisch realisierbarer, asymptotisch optimaler Algorithmus zur Schätzung von Sequenzen, die von endlichen Automaten erzeugt wurden, zur Verfügung.

---

#### 4 Übertragungssysteme für den MIMO-Kanal

## 5 Kapazität von MIMO-Kanälen

### 5.1 Zum Begriff: Kapazität und Transinformation

Im strengen Sinne bezeichnet die Kanalkapazität eine obere Grenze für den über einen gegebenen Kanal übertragbaren Informationsfluss. Als vorausgesetzt werden dabei die Eigenschaften des Kanals angenommen, im einzelnen:

- zeitdiskret oder zeitkontinuierlich
- diskretes oder kontinuierliches Sendetalphabet
- Abbildungswahrscheinlichkeiten von Symbolsequenzen am Kanaleingang auf Symbolsequenzen am Kanalausgang, bzw. die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen bei wertkontinuierlichen Kanälen
- die tolerierbaren Kosten der Übertragung, z. B. eine höchstens aufzuwendende mittlere Sendeleistung

### 5.2 Kapazität von SISO-Kanälen

Für einen gegebenen Kanal mit Übertragungsfunktion  $H_K(f)$ , additiver gaußverteilter Störung mit einem Leistungsspektrum  $L_n(f)$  und eine aufzuwendende Sendeleistung  $S$  ergibt sich die Kanalkapazität zu:

$$C = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \log \max \left\{ 1, \frac{|H_K(f)|^2 K}{L_n(f)} \right\} df \quad (5.1)$$

## 5 Kapazität von MIMO-Kanälen

Dabei ist  $K$  der „Pegelstand“, der sich für das gemäß *water pouring* optimierte Sendeleistungsspektrum ergibt.  $K$  ist so zu wählen, dass die geforderte Sendeleistung  $S$  erreicht wird:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \max \left\{ 0, K - \frac{L_n(f)}{|H_K(f)|^2} \right\} df = S \quad (5.2)$$

Das zum Erreichen der Kapazität notwendige Sendeleistungsspektrum ist der Integrand von Gleichung (5.2):

$$L_s(f) = \max \left\{ 0, K - \frac{L_n(f)}{|H_K(f)|^2} \right\} \quad (5.3)$$

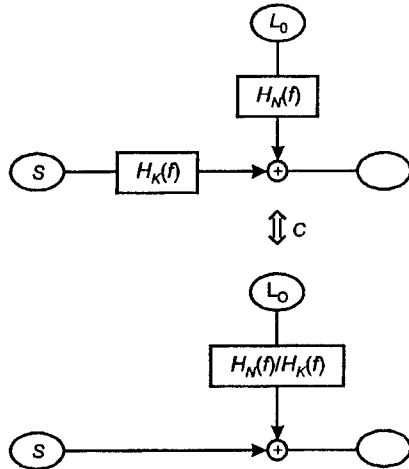


Abbildung 5.1: Im Sinne der Kanalkapazität sind eine Verzerrung durch den Kanal und eine Färbung der Störung grundsätzlich gegeneinander austauschbar.

Bemerkenswerterweise hängt die Kanalkapazität nur vom Verhältnis

$$\Gamma(f) = \frac{L_n(f)}{|H_K(f)|^2} \quad (5.4)$$

## 5.2 Kapazität von SISO-Kanälen

von Störleistungsspektrum und Leistungsübertragungsfunktion des Kanals ab. Damit sind eine Verzerrung durch den Kanal und eine Färbung der Störung grundsätzlich gegeneinander austauschbar. Bild 5.1 illustriert diesen Zusammenhang. Die Äquivalenz gilt natürlich nur hinsichtlich der Kanalkapazität, nicht hinsichtlich des Übertragungsweges des Nutzsignals.

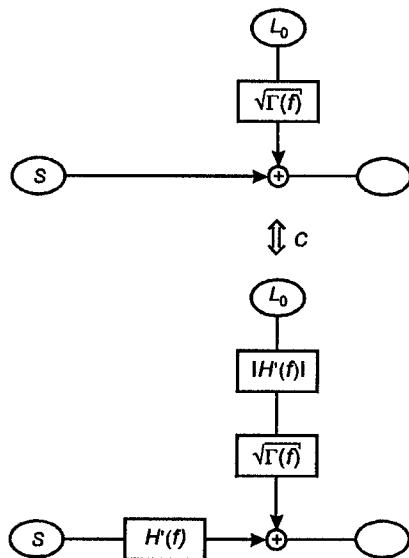


Abbildung 5.2: Filterung von Nutzsignal und Störung mit betragsmäßig gleichen Übertragungsfunktionen hat keinen Einfluss auf die Kanalkapazität.

Gleichung (5.4) zeigt auch, dass eine gleichzeitige Filterung von Nutzsignal und Störung mit betragsmäßig identischer Übertragungsfunktion keinen Einfluss auf die Kapazität hat, vgl. Abb. 5.2.

### 5.3 Kapazität von MIMO-Kanälen

In diesem Abschnitt soll ausgehend vom SISO-Fall Schritt für Schritt die Kanalkapazität für MIMO-Systeme entwickelt werden. In [BW74] findet sich ein mathematisch strenger Beweis für die Richtigkeit des Ergebnisses, der jedoch aufgrund seiner Konstruktion weder auf die Herleitung schließen lässt noch anschauliches Verständnis vermittelt.

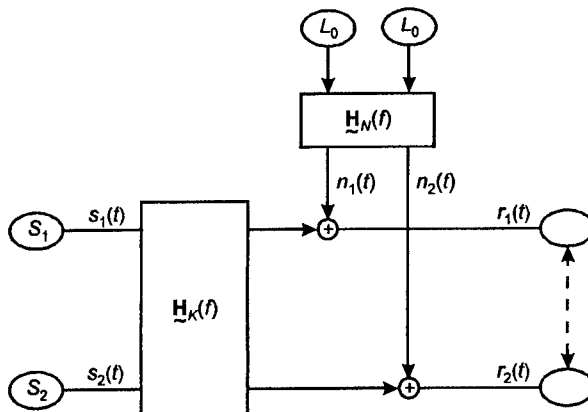


Abbildung 5.3: Modell eines MIMO-Übertragungssystems mit jeweils zwei Ein- und Ausgängen (2I2O).

#### 5.3.1 Einführung

Den folgenden Betrachtungen legen wir das in Abb. 5.3 wiedergegebene Modell eines 2I2O-Systems zugrunde. Dabei wird für jeden Ausgang eine unabhängige Störquelle angenommen. Gegenüber zwei parallelen SISO-Systemen sind folgende Unterschiede, die bei der Berechnung der Kapazität zu berücksichtigen sind, bemerkenswert:



### 5.3 Kapazität von MIMO-Kanälen

- Teile des Nutzsignals  $s_1(t)$  werden durch die Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}_K(f)$  auf das Empfangssignal  $r_2(t)$  eingekoppelt. Hier handelt es sich nicht um eine Störung, sondern um einen informationstragenden Signalanteil, der durch einen  $r_1(t)$  und  $r_2(t)$  gemeinsam verarbeitenden Empfänger berücksichtigt werden muss. In Abb. 5.3 ist dies durch den gestrichelten Doppelpfeil zwischen den beiden Empfängern symbolisiert.
- Die Elemente auf den Nebendiagonalen der Störfärbungsmatrix  $\mathbf{H}_N(f)$  bewirken Korrelationen zwischen den Störsignalen  $n_1(t)$  und  $n_2(t)$ . Diese Korrelationen können vom Empfänger bei gemeinsamer Detektion von  $r_1(t)$  und  $r_2(t)$  zur Verringerung der effektiv wirksamen Störung ausgenutzt werden.

Gegenüber einem doppelten SISO-System, bei dem die Matrizen  $\mathbf{H}_K(f)$  und  $\mathbf{H}_N(f)$  jeweils nur in der Hauptdiagonalen besetzt sind, stellen wir also

- eine Erhöhung der Empfangsnutzleistung durch Übersprechanteile und
- eine Verringerung der wirksamen Störleistung durch Korrelationen

fest. Folglich sollte gelten:

$$C_{MIMO} \geq m \cdot C_{SISO}, \quad (5.5)$$

wobei  $m$  für die Dimensionalität des MIMO-Systems steht. Je ausgeprägter Übersprechen und Störungskorrelation sind, umso größer dürfte der Kapazitätsvorteil des MIMO-Systems ausfallen.

#### 5.3.2 Anschauliche Ableitung der Kapazität

Zunächst vereinfachen wir das Modell aus Abb. 5.3 zu einem äquivalenten Modell mit verzerrungsfreiem Nutzsignalpfad. Wie in Abb. 5.4 dargestellt, wird die Übertragungsmatrix des Kanals zunächst hinter die Additionsstelle geschoben und dabei auf den Empfangspfad und – invers als  $\mathbf{H}_K^{-1}(f)$  – auf den Störpfad aufgeteilt.  $\mathbf{H}_K(f)$  im Empfangspfad wiederum ist für die Kapazitätsberechnung irrelevant, da es in gleicher Weise und reversibel auf Nutzsignal und Störung wirkt. Es sei stets vorausgesetzt, dass  $\mathbf{H}_K(f)$  regulär ist.

## 5 Kapazität von MIMO-Kanälen

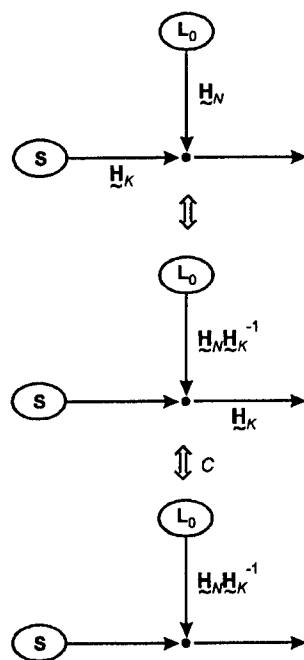


Abbildung 5.4: Umformung des realitätsnahen MIMO-Modells zum Modell mit verzerrungsfreiem Kanal und farbiger, korrelierter Störung. Die Übertragungsfunktionen sind hier wieder als Gewichte an den Kanten des Grafen aufgetragen.

### 5.3 Kapazität von MIMO-Kanälen

Die LDS-Matrix (vgl. Abschnitt 3.1.1.4 auf Seite 24) der wirksamen Störung am Empfängereingang für das Modell in Abb. 5.4 unten beträgt mit (3.24):

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}(f) &= \tilde{\mathbf{H}}_K^{1T}(f) \tilde{\mathbf{H}}_N^T(f) \tilde{\mathbf{L}}_0 \tilde{\mathbf{H}}_N^*(f) \tilde{\mathbf{H}}_K^{1*}(f) \\ &= \tilde{\mathbf{H}}_K^{1T}(f) \tilde{\mathbf{H}}_N^T(f) \tilde{\mathbf{L}}_0 \tilde{\mathbf{H}}_N^*(f) \tilde{\mathbf{H}}_K^{1*}(f)\end{aligned}\quad (5.6)$$

Dieser Ausdruck entspricht genau der entsprechenden skalaren Funktion  $\Gamma(f)$  (5.4) des zuvor diskutierten SISO-Falls.  $\tilde{\mathbf{L}}_0$  ist eine Diagonalmatrix mit den Störleistungsdichten der unabhängigen, weißen, gaussischen Störquellen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können diese für alle Störquellen identisch angenommen und Unterschiede in der wirksamen Leistung der einzelnen Quellen durch  $\tilde{\mathbf{H}}_N(f)$  modelliert werden.

Die LDS-Matrix  $\tilde{\Gamma}(f)$  lässt sich in eine Diagonalmatrix

$$\tilde{\Lambda}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_0(f) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m(f) \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

mit ihren Eigenwerten und zwei unitäre Matrizen (d. h.  $\tilde{\mathbf{A}}^H = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}$ ) zerlegen:

$$\tilde{\Gamma}(f) = \tilde{\mathbf{A}}^T(f) \tilde{\Lambda}(f) \tilde{\mathbf{A}}^*(f) \quad (5.8)$$

Diese Zerlegung entspricht der Filterung  $m$  unabhängiger Störquellen mit Leistungsspektren  $\lambda_k(f)$  mit einer Korrelationsmatrix  $\tilde{\mathbf{A}}(f)$  (vgl. Abb. 5.5, oben). Da  $\tilde{\mathbf{A}}(f)$  unitär ist, ist diese Filterung invariant bezüglich der Störleistung.

Diese Zerlegung ermöglicht die Dekorrelation der Störung im Empfänger durch die zu  $\tilde{\mathbf{A}}(f)$  inverse Matrix  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(f) = \tilde{\mathbf{A}}^H(f)$ . Die dadurch entstehende Verzerrung des Nutzsignalpfades wird durch eine inverse Vorverzerrung mit  $\tilde{\mathbf{A}}(f)$  im Sender kompensiert (Abb. 5.5, mitte). Da  $\tilde{\mathbf{A}}(f)$  unitär ist, ist dies wieder leistungsneutral. Das resultierende Blockschaltbild kann unmittelbar als Anleitung zum Systemaufbau verstanden werden.

Für die Berechnung der Kapazität ist die Verschiebung der Korrelationsmatrix  $\tilde{\mathbf{A}}(f)$  aus dem Störpfad hinter den Summationspunkt in den Empfangspfad sinnvoll (Abb. 5.5, unten). Dies ist wiederum durch eine zusätzliche Filterung mit der inversen Matrix  $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(f) = \tilde{\mathbf{A}}^H(f)$  im Sendepfad zu kompensieren. Wie

## 5 Kapazität von MIMO-Kanälen

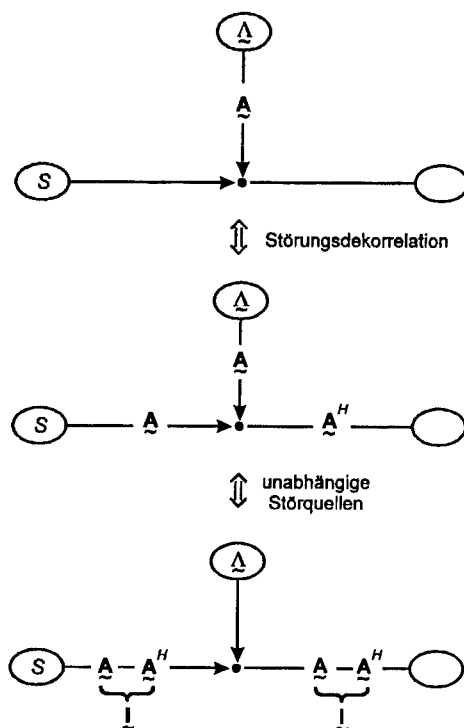


Abbildung 5.5: Äquivalente Varianten des MIMO-Übertragungssystems. Oben: Farbige, korrelierte Störung, dargestellt durch  $m$  unabhängige, farbige Störquellen und eine leistungsneutrale Korrelationsmatrix. Mitte: Dekorrelation der Störung im Empfänger, Kompensation durch Vorverzerrung im Sender. Unten: Vereinfachung durch Verschiebung der Korrelationsmatrix aus dem Störpfad hinter den Summationspunkt.

### 5.3 Kapazität von MIMO-Kanälen

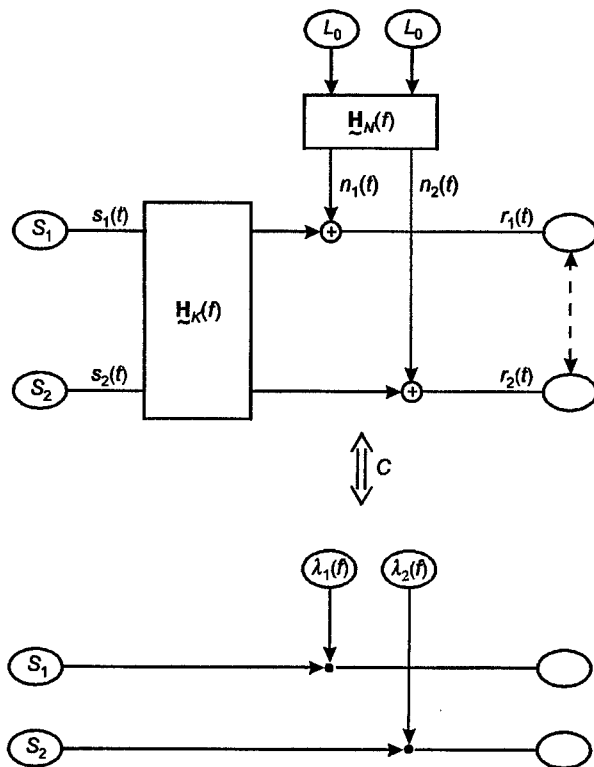


Abbildung 5.6: Äquivalenz bezüglich der Kapazität zwischen einem allgemeinen MIMO-System (hier: 2I2O) und parallelen SISO-Systemen mit dekorrelierter Störung.

## 5 Kapazität von MIMO-Kanälen

aus Abb. 5.5 deutlich wird, ergeben sich für Sende- und Empfangspfad jeweils die Einheitsmatrizen.

Zusammenfassend lässt sich feststellen (siehe Abb. 5.6):

**Korollar 5.1.** Die Kapazität eines  $m \times m$ -MIMO-Kanals mit Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}_K(f)$  und einer Störung mit der LDS-Matrix  $\tilde{\mathbf{H}}_N^T(f) L_0 \tilde{\mathbf{H}}_N^*(f)$  ist gleich der Summe der Kapazitäten von  $m$  parallelen, unabhängigen SISO-Systemen mit den Störleistungsspektren  $\lambda_k(f)$ , wobei  $\lambda_k(f)$  die Eigenwerte von

$$\tilde{\mathbf{H}}_K^{1T}(f) \tilde{\mathbf{H}}_N^T(f) L_0 \tilde{\mathbf{H}}_N^*(f) \tilde{\mathbf{H}}_K^{1*}(f)$$

sind.

### 5.3.3 Sonderfälle

Im Folgenden soll die zuvor abgeleitete Beziehung anhand einiger Sonderfälle illustriert werden.

#### 5.3.3.1 Kanal ohne Nebensprechen, unkorrelierte Störung

Tritt im Kanal kein Nebensprechen auf – z. B. aufgrund perfekter Einzelschirmung der Adernpaare – nimmt  $\mathbf{H}_K(f)$  Diagonalform an. Sind die Störungen, die auf die Empfänger wirken, gegenseitig unkorreliert, wird auch  $\mathbf{H}_N(f)$  zur reinen Diagonalmatrix. Damit nimmt auch

$$\tilde{\Gamma}(f) = \tilde{\mathbf{H}}_K^{1T}(f) \tilde{\mathbf{H}}_N^T(f) L_0 \tilde{\mathbf{H}}_N^*(f) \tilde{\mathbf{H}}_K^{1*}(f)$$

Diagonalform an mit den Diagonalelementen

$$\gamma_{ii}(f) = \frac{L_0 |H_{N,ii}(f)|^2}{|H_{K,ii}(f)|^2} . \quad (5.9)$$

Der Vergleich mit Gleichung (5.4) zeigt unmittelbar, dass es sich hier um  $m$  parallele, voneinander unabhängige SISO-Kanäle handelt. Entsprechend ergibt sich die Kapazität dieses entarteten MIMO-Systems als Summe der Kapazitäten der SISO-Systeme.

Wir können daraus schließen:

### 5.3 Kapazität von MIMO-Kanälen

**Satz 5.1.** *Die Berechnung der Kapazität eines MIMO-Systems durch simple Addition der einzelnen Kapazitäten der SISO-Systeme führt dann zu falschen Ergebnissen, wenn wenigstens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1. *Die an den Eingängen der Empfänger wirkenden Störungen sind korreliert.*
2. *Zwischen den einzelnen Kanälen des MIMO-Systems tritt Nebensprechen auf.*

#### 5.3.3.2 Vollständig symmetrische Systeme

Unter einem *vollständig symmetrischen System* wollen wir ein System verstehen, dessen jeder Empfänger eine identische Sicht (im Hinblick auf Übertragungsfunktionen und mittlere Leistungsdichten)

- des eigenen Senders,
- der nebensprechenden Subsysteme, und
- der Störquellen

hat.

**Definition 5.1.** *Ein System heißt vollständig symmetrisch, wenn gilt:*

1. *Alle Sendeleistungsdichten sind gleich:  $S_i(f) = S_j(f) \quad \forall i, j$*
2.  *$\tilde{\mathbf{H}}_K(f)$  ist symmetrisch und zyklisch.*
3.  *$\tilde{\mathbf{H}}_N(f)$  ist symmetrisch und zyklisch.*

Das einfachste vollständig symmetrische MIMO-System ist in Abb. 5.7 dargestellt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(f) &= \tilde{\mathbf{H}}_N^T(f) L_0 \tilde{\mathbf{H}}_N^*(f) \\
 &= L_0 \begin{pmatrix} H_{N1} & H_{N2} \\ H_{N2} & H_{N1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{N1} & H_{N2} \\ H_{N2} & H_{N1} \end{pmatrix}^* \\
 &= L_0 \begin{pmatrix} H_{N1}H_{N1}^* + H_{N2}H_{N2}^* & H_{N1}H_{N2}^* + H_{N2}H_{N1}^* \\ H_{N2}H_{N1}^* + H_{N1}H_{N2}^* & H_{N1}H_{N1}^* + H_{N2}H_{N2}^* \end{pmatrix} \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

## 5 Kapazität von MIMO-Kanälen

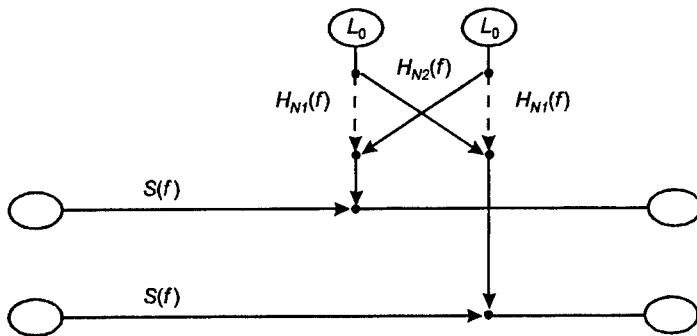


Abbildung 5.7: Beispiel eines vollständig symmetrischen Systems.

Der Matrixterm auf der rechten Seite von (5.10) ist von der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & a - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (5.11)$$

$$\Rightarrow \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} a + |b| & 0 \\ 0 & a - |b| \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Bemerkenswert ist hier, dass auch vollständig symmetrische Systeme in der Regel zu voneinander *verschiedenen* Eigenwerten  $\lambda_i(f)$  führen. Auch für ein vollständig symmetrisches System sind also die äquivalenten SISO-Ersatzsysteme entsprechend Abb. 5.6 auf Seite 79 nicht identisch!

## 5.4 Bemessung der Sendespektren

Ziel dieses Abschnitts ist die Entwicklung einer Dimensionierungsvorschrift für die Leistungsdichten der Sender entsprechend dem Water-Pouring-Modell für SISO-Systeme, vgl. die Gleichungen (5.2) und (5.3) auf Seite 72.



#### 5.4 Bemessung der Sendespektren

Aus der Umformung des allgemeinen MIMO-Systems in  $m$  parallele, unabhängige SISO-Ersatzsysteme (vgl. Abb. 5.5 auf Seite 78) ergibt sich unmittelbar ein Ansatz zur Berechnung der Kapazität. Für jedes SISO-Ersatzsystem gilt, vgl. (5.1):

$$C_i = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \log \max \left\{ 1, \frac{K_i}{\lambda_{ii}(f)} \right\} df \quad (5.13)$$

$K_i$  ist die Füllhöhe bei Anwendung des Water-Pouring-Verfahrens, vgl. Abb. 5.8.  $K_i$  ist so einzustellen, dass die implizite Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \max \{ 0, K_i - \lambda_{ii}(f) \} df = S_i \quad (5.14)$$

erfüllt ist.

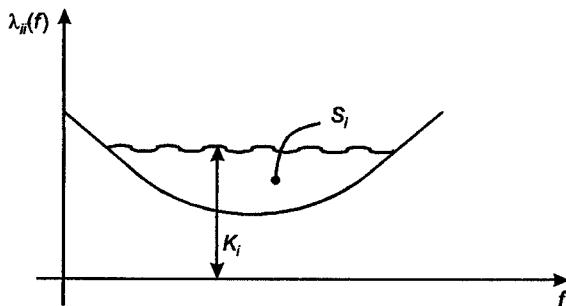


Abbildung 5.8: Illustration des Water-Pouring-Verfahrens für ein SISO-System: Die durch  $\lambda_{ii}(f)$  gebildete Badewanne wird mit der Sendeleistung  $S$  aufgefüllt. Es stellt sich ein Pegel  $K_i$  ein.

Bei MIMO-Systemen sind die einzelnen Sendeleistungen  $S_i$  selbst Gegenstand der Optimierung unter der Nebenbedingung

$$\sum_{i=1}^m S_i = S, \quad (5.15)$$

dass in der Summe die gegebene Gesamtsendeleistung  $S$  erreicht wird. Die  $m$  unabhängigen SISO-Ersatzsysteme kann man sich als parallele „Badewannen“ vorstellen, die aus dem vorhandenen Leistungsreservoir  $S_S$  aufzufüllen

## 5 Kapazität von MIMO-Kanälen

sind. Dabei sind die Badewannen in der Regel verschieden tief, vgl. den vorangehenden Abschnitt. So wie in Abb. 5.8 das Auffüllen am tiefsten Punkt der Badewanne beginnt, beginnt im Falle eines MIMO-Systems das Auffüllen am tiefsten Punkt der tiefsten Badewanne. Damit stellt sich schließlich ein über alle Badewannen konstanter Pegel

$$K_i = K_j = K \quad \forall i, j \quad (5.16)$$

ein. Die Nebenbedingung lautet folglich:

$$\sum_i \int_{-\infty}^{\infty} \max \{0, K - \lambda_{ii}(f)\} df = S \quad (5.17)$$

Damit ergeben sich i. a. verschiedene Sendeleistungsdichten

$$L_{s,i}(f) = \max \{0, K - \lambda_{ii}(f)\} \quad (5.18)$$

und verschiedene Sendeleistungen  $S_i$ .

## 5.5 Der MIMO-Gewinn

### 5.5.1 Maximale Transinformation im SISO-Kontext

Betrachtet man ein MIMO-System – wie heute allgemein üblich – im Kontext der einzelnen SISO-Subsysteme, treten dreierlei Verluste auf:

1. Durch Nebensprechen auf andere Subsysteme ausgekoppelte Nutzsignalanteile können nicht verwertet werden.
2. Durch Nebensprechen von anderen Subsystemen eingekoppelte Signale wirken als Störung.
3. Korrelationen zwischen den in verschiedene Empfänger eingekoppelten Störsignalen können nicht genutzt werden.

Abbildung 5.9 verdeutlicht dies am Beispiel eines  $2 \times 2$ -MIMO-Systems.

### 5.5 Der MIMO-Gewinn

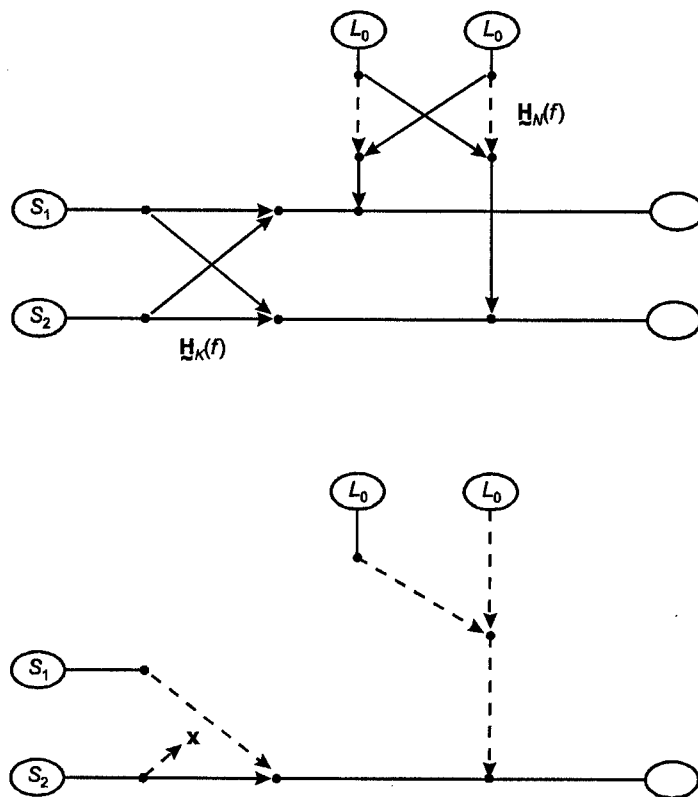


Abbildung 5.9: Nutzsignaltragende (ausgezogen gezeichnete) und störsignaltragende (unterbrochen gezeichnete) Pfade in einem MIMO-System. Oben: MIMO-Kontext; Nebensprechanteile sind Nutzsignale, Korrelationen zwischen den Störungen werden zur Verringerung der wirksamen Störung genutzt. Unten: SISO-Kontext; ausgekoppelte Nutzsignalanteile gehen verloren, eingekoppelte Nebensprechsignale wirken als Störung, Korrelationen der Störsignale können wegen der Begrenzung des Blickwinkels auf einen einzigen Empfänger nicht genutzt werden.

## 5 Kapazität von MIMO-Kanälen

Der Nutzsignalübertragungspfad des  $i$ -ten Subsystems wird durch  $H_{ii}(f)$  beschrieben. Die wirksame Störung setzt sich zusammen aus externen Störanteilen

$$\begin{aligned} L_{n,ii}(f) &= L_0 \sum_{\forall j} H_{N,ij}(f) H_{N,ij}^*(f) \\ &= L_0 \sum_{\forall j} |H_{N,ij}(f)|^2 \end{aligned} \quad (5.19)$$

und Nebensprechanteilen benachbarter Subsysteme, die hier als interne Störung  $L_{int,i}(f)$  wirken:

$$\begin{aligned} L_{int,i}(f) &= \sum_{\forall j} (1 - \delta_{i,j}) H_{K,ij}(f) L_{S,j}(f) H_{N,ij}^*(f) \\ &= \sum_{\forall j} (1 - \delta_{i,j}) |H_{K,ij}(f)|^2 L_{S,j}(f) \end{aligned} \quad (5.20)$$

$\delta_{i,j}$  steht hier für das Kronecker-Symbol:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (5.21)$$

Abbildung 5.10 verdeutlicht die Wirkung interner und externer Störgrößen eines MIMO-Subsystems im SISO-Kontext. Der Dichte-Term im Integranden der Kapazitätsgleichung (5.1) ergibt sich damit zu:

$$\gamma_{ii}(f) = \frac{L_{n,ii}(f) + L_{int,i}(f)}{|H_{K,ii}(f)|^2} \quad (5.22)$$

Durch Anwendung der Gleichungen (5.1) bis (5.3) lässt sich daraus in einfacher Weise eine obere Grenze für die Transinformation  $C_{SISO,i}$  für das  $i$ -te Subsystem berechnen.

### 5.5.2 SISO-Verlust

Der mittlere Unterschied zwischen der technisch vorherrschenden Betrachtung aller Subsysteme im SISO-Kontext und der MIMO-Betrachtung ist der SISO-Verlust.

## 5.5 Der MIMO-Gewinn

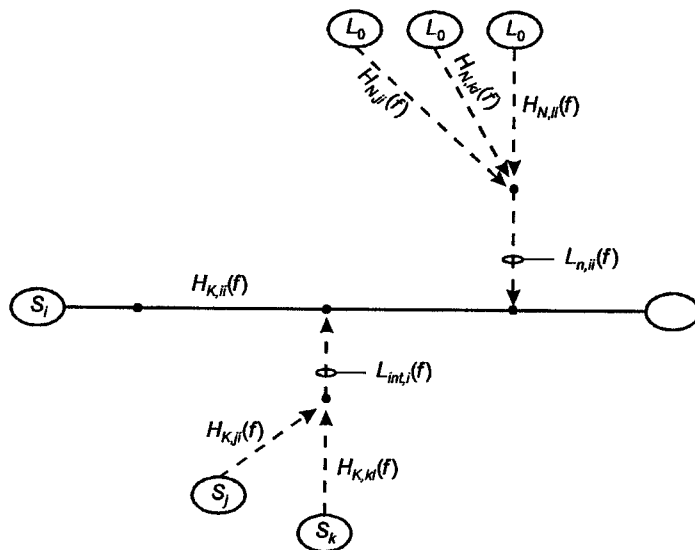


Abbildung 5.10: Zur Berechnung der Kapazität des  $i$ -ten Subsystems eines MIMO-Systems im SISO-Kontext. Störgrößen sind durch unterbrochene Linien symbolisiert.

## 5 Kapazität von MIMO-Kanälen

**Definition 5.2.** Sei  $C_{MIMO}$  die Kapazität eines  $m \times m$ -MIMO-Systems und  $C_{SISO,i}$  die maximale Transinformation des  $i$ -ten Subsystems im SISO-Kontext, so ist der SISO-Verlust  $\Delta C_{SISO}$  definiert als:

$$\Delta C_{SISO} = C_{MIMO} - \sum_{i=1}^m C_{SISO,i}$$

Für den relativen SISO-Verlust  $\phi_{SISO}$  gilt:

$$\phi_{SISO} = \frac{\Delta C_{SISO}}{C_{MIMO}}$$

Die Definition eines SNR-Abstandsmaßes im Sinne eines Vorteils bezüglich der Sendeleistung im MIMO-Kontext gegenüber dem SISO-Kontext bei gleicher maximaler Transinformation macht nur begrenzt Sinn, da bei Nebensprechbegrenzten Systemen die interne Störung mit der aufgewendeten Sendeleistung wächst und die erzielbare Transinformation somit unabhängig von der Sendeleistung werden kann. Der SNR-Abstand würde dann unendlich.

### 5.5.3 Allgemeiner kontextbezogener Verlust

Entsprechend der Vorgehensweise im vorstehenden Abschnitt kann für jeden beliebigen Kontext  $\mathcal{K}$  ein Verlust bezüglich des MIMO-Kontext definiert werden. Dazu nehmen wir an, dass das MIMO-System in  $n$  Subsysteme im Kontext  $\mathcal{K}$  zerlegt werden kann.

**Definition 5.3.** Sei  $C_{MIMO}$  die Kapazität eines MIMO-Systems und  $C_{\mathcal{K},i}$  die maximale Transinformation des  $i$ -ten Subsystems (von  $n$ ) im Kontext  $\mathcal{K}$ , so ist der Verlust im Kontext  $\mathcal{K}$  definiert als:

$$\Delta C_{\mathcal{K}} = C_{MIMO} - \sum_{i=1}^n C_{\mathcal{K},i}$$

Für den relativen Verlust  $\phi_{\mathcal{K}}$  gilt:

$$\phi_{\mathcal{K}} = \frac{\Delta C_{\mathcal{K}}}{C_{MIMO}}$$

Da der MIMO-Kontext keine internen Störer aufweist und die Korrelation externer Störquellen vollständig nutzen kann, ist für jeden Kontext  $\mathcal{K} \subset MIMO$  der relative Verlust  $\phi_{\mathcal{K}} > 0$ .

## 5.6 Korrelationseigenschaften der Störung

Ein Aspekt des MIMO-Kontext ist die Ausnutzung gegenseitiger Korrelation der an den Empfängern der Subsysteme wirksamen Störsignale. Zur Verdeutlichung sei darauf hingewiesen, dass hier die *räumliche* Korrelation zweier verschiedener Störsignale gemeint ist. Die durch Färbung hervorgerufene *zeitliche* Korrelation kann im Empfänger in derselben Weise wie bei SISO-Systemen genutzt werden.

Die räumlichen Korrelationen werden verursacht durch die Nebendiagonalelemente  $H_{N,ij}(f)$ ,  $i \neq j$  der Störfärbungsmatrix  $\mathbf{H}_N(f)$ . Sie führen zu nicht verschwindenden Kreuzleistungsdichten der Störsignale  $L_{n,ij}(f)$ ,  $i \neq j$ . Grundsätzlich ist der durch räumliche Störungsdekoration erzielbare Gewinn umso größer, je stärker die Nebendiagonalen der Störfärbungsmatrix besetzt sind.

### 5.6.1 Räumlich unkorrelierte Störung

Als räumlich unkorreliert bezeichnen wir zwei Störsignale  $n_i(t)$  und  $n_j(t)$ , wenn ihre Kreuzkorrelierte für jeden Zeitpunkt verschwindet.

**Definition 5.4.** Zwei (stochastische) Störsignale heißen *räumlich unkorreliert*, wenn gilt:

$$E\{n_i(t)n_j(t+\tau)\} = 0 \quad \forall \tau$$

Falls die an den Eingängen der Empfänger wirkenden Störsignale gegenseitig völlig unkorreliert sind, nimmt  $\mathbf{H}_N(f)$  Diagonalform an:

$$\mathbf{H}_N(f) = \begin{pmatrix} H_{N,11}(f) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & H_{N,mm}(f) \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Ebenso verschwinden alle Kreuzleistungsdichten in der Störfärbungsmatrix:

$$\mathbf{L}_n(f) = \begin{pmatrix} L_{n,11}(f) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & L_{n,mm}(f) \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

### 5.6.2 Räumlich vollständig korrelierte Störung

**Definition 5.5.** Zwei (stochastische) Störsignale  $n_i(t)$  und  $n_j(t)$  heißen vollständig korreliert, wenn ein  $\tau$  existiert, so dass

$$\frac{E\{n_i(t)n_j(t+\tau)\}}{\sqrt{E\{|n_i(t)|^2\}E\{|n_j(t)|^2\}}} = 1$$

Wenn alle wirksamen Störsignale vollständig korreliert sind, gilt für die Kreuzleistungsdichten

$$|L_{n,ij}(f)| = \sqrt{L_{n,i}(f)L_{n,j}(f)} \quad (5.25)$$

### 5.6.3 Mittlerer Korrelationskoeffizient

Gleichung (5.25) lässt sich leicht in ein Maß für die im Mittel tatsächlich vorhandene räumliche Korrelation umformulieren:

**Definition 5.6.** Der mittlere räumliche Korrelationskoeffizient  $\rho$  von  $m$  Störquellen ist definiert durch

$$\rho = \frac{2}{m(m-1)} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|L_{n,ij}(f)|}{\sqrt{N_i N_j}} df$$

Dabei ist  $N_i$  die Leistung des  $i$ -ten Störsignals:

$$N_i = \int_{-\infty}^{\infty} L_{n,ii}(f) df$$

Offensichtlich liegt für  $\rho = 0$  Unkorreliertheit, für  $\rho = 1$  vollständige Korrelation aller Störsignale vor.

## 5.7 Zusammenfassung

Ausgehend von klassischen SISO-Systemen wurde die Kanalkapazität für allgemeine gedächtnisbehaftete lineare MIMO-Systeme mit gaußverteilter Störung entwickelt. Kern der Kapazitätsberechnung ist die Transformation des



### 5.7 Zusammenfassung

MIMO-Systeme in äquivalente SISO-Systeme mit unabhängigen Störquellen. Diese Vorgehensweise entspricht der Störungsdekorrelation und kann unmittelbar als Anleitung zum Systemaufbau verstanden werden. Bemerkenswert ist, dass selbst bei völlig symmetrischen MIMO-Systemen äquivalente SISO-Systeme mit voneinander verschiedenen Störleistungsdichten entstehen. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, für eine optimale Nutzung eines MIMO-Systems die Sender mit verschiedenen Leistungen und Leistungsdichten zu betreiben.

Die so erreichte Kapazität kann mit der maximalen Transinformation in einem kleineren Kontext verglichen werden, woraus ein Kontext-spezifischer Verlust folgt. Den Grenzfall stellt der SISO-Kontext dar, bei dem jedes Subsystem für sich betrachtet und alle anderen Subsysteme als Störer aufgefasst werden. Dieser – häufig angewendete – Kontext führt zum maximalen Verlust.

Die Überlegenheit des MIMO-Kontext wird zum Teil durch die Nutzung räumlicher Korrelation zwischen den an den Empfängereingängen wirksamen Störsignalen bestimmt. Der mittlere räumliche Korrelationskoeffizient  $\rho$  misst die Ausprägung dieser Korrelation und nimmt Werte von 0 – entsprechend völliger Unkorreliertheit – bis 1 – bei vollständiger Korrelation aller Störsignale – an.

---

## 5 Kapazität von MIMO-Kanälen

## 6 MIMO-Übertragungssysteme im Zeitbereich

Dieses Kapitel soll die Brücke von den prinzipiellen Aussagen über die Kanalkapazität zu realisierbaren Übertragungssystemen mit Entzerrung bzw. Störungsdekorrelation im Zeitbereich schlagen. Von Interesse ist der Zusammenhang zwischen der Kanalkapazität und der erreichbaren Transinformation mit einfach realisierbaren, entscheidungsrückgekoppelten Systemen. Price [Pri72] wies bereits 1972 nach, dass sich bei einem verzerrenden Kanal und bei Verwendung eines DFE-Empfängers unter recht allgemeinen Voraussetzungen die Kanalkapazität unter den selben Voraussetzungen erreichen lässt wie bei einem AWGN-Kanal. Verschiedene Ansätze zur analytischen Optimierung von Sender- und Empfängerfiltern, z. B. [YR94], oder die Betrachtung einiger Szenarien von konkreter technischer Bedeutung im Zuge der HDSL-Hype in der ersten Hälfte der neunziger Jahre, z. B. [DH92], brachten keine grundlegend neuen Erkenntnisse. Die von Fischer und Huber entwickelte Theorie der koordinierten Übertragung [FHK94] führte zu realisierbaren, örtlich und zeitlich kausalen Störungsdekorrelations-Strukturen, die funktional exakt die im vorangegangenen Kapitel (siehe Abschnitt 5.3.2) zur Berechnung der Kapazität eines MIMO-Kanals durchgeführten Umformungen abbilden. Die Entwicklung der theoretischen Beschreibung unmodulierter Bandpassübertragung in [MT94] erlaubt schließlich die Erweiterung der Aussagen auf Kanäle, deren Dämpfungsfunktion nicht notwendig monoton innerhalb des ersten Nyquist-Intervalls verläuft.

## 6.1 MIMO-Übertragungssysteme mit DFE-Empfänger

Wir gehen vom Modell einer MIMO-Übertragung entsprechend dem in Abb. 5.5 auf Seite 78 mittig dargestellten System aus. Verzerrungen des Kanals und Farbigkeit der Störung werden zusammengefasst und gemäß Korollar 5.1 auf Seite 80 in eine Diagonalmatrix  $\Lambda(f)$  und eine unitäre Störungsdekorrelationsmatrix  $\tilde{\mathbf{A}}^H(f)$  zerlegt. Aufgabe des Systementwurfs ist es nun, für  $\tilde{\mathbf{A}}(f)\tilde{\mathbf{A}}^H(f)$  eine Realisierung (d. h. Faktorisierung) zu finden, welche

- die Aufteilung in einen minimalphasigen und einen maximalphasigen Anteil liefert, und
- im Feedback-Pfad örtlich und zeitlich kausal ist.

*Zeitliche Kausalität* bedeutet in der üblichen Definition, dass ein rückgekoppelter Wert nur von vorangegangenen Entscheidungen abhängig sein darf. Unter *örtlicher Kausalität* wollen wir die Eigenschaft verstehen, dass ein Detektionswert des  $i$ -ten Subsystems im gleichen Symbolintervall nur auf die Subsysteme  $i+1 \dots m$ , nicht aber auf die Subsysteme  $1 \dots i$  wirkt. Diese Forderung vermeidet das Entstehen nicht auflösbarer, geschlossener, verzögerungsfreier Zyklen. Abbildung 6.1 illustriert diesen Zusammenhang.

### 6.1.1 Frontend und lineares Backend

Das mehrdimensionale Äquivalent zum *Whitened Matched Filter* [For72] ergibt sich in naheliegender Weise aus einem analogen *Matched Filter*  $\mathbf{H}_E(f)$  in reiner Diagonalform, Abtastung und anschließender Störungsdekorrelation durch ein i. a. vollständig besetztes, zeitdiskretes Matrixfilter  $\mathbf{c}(D)$ , vgl. Abb. 6.2.  $\mathbf{c}(D)$  invertiert dabei das Färbungsfilters  $\tilde{\mathbf{h}}_N(D)$  der zeitdiskreten Störung:

$$\mathbf{c}(D)\tilde{\mathbf{h}}_N(D) = \mathbf{I} \quad (6.1)$$

### 6.1 MIMO-Übertragungssysteme mit DFE-Empfänger

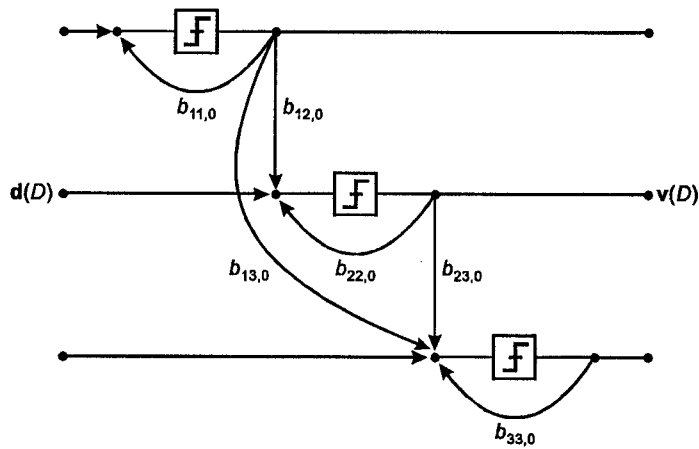


Abbildung 6.1: Zur Definition der örtlichen Kausalität bei einem rückgekoppelten System: Der aktuell detektierte Wert eines Subsystems wirkt nur auf räumlich nachgeordnete, d. h. weiter unten liegende Subsysteme. Dadurch werden verzögerungsfreie geschlossene Zyklen vermieden. Bezüglich zurückliegender, also bereits verzögerter Entscheidungen, kann die Struktur natürlich voll vermascht sein.

$\tilde{\mathbf{H}}_E(f)$  als Matched Filter ist sinnvollerweise so zu dimensionieren, dass gemeinsam mit dem Sendefilter  $\tilde{\mathbf{H}}_S(f)$  die Nyquistbedingung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{H}}_S(f - kT_S) \tilde{\mathbf{H}}_E(f - kT_S) = \text{const} \cdot \mathbf{I} \quad (6.2)$$

erfüllt wird. Damit ergibt sich das zeitdiskrete Ersatzschaltbild nach Abb. 6.3.

Der Vergleich von Abb. 6.3 mit Abb. 5.5 auf Seite 78 zeigt, dass gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{A}}^T(f - \frac{k}{T_S}) \tilde{\mathbf{A}}(f - \frac{k}{T_S}) \tilde{\mathbf{A}}^*(f - \frac{k}{T_S}) = \sigma_0^2 \tilde{\mathbf{h}}_N^T(e^{j2\pi f T_S}) \tilde{\mathbf{h}}_N(e^{j2\pi f T_S}) \quad (6.3)$$

## 6 MIMO-Übertragungssysteme im Zeitbereich

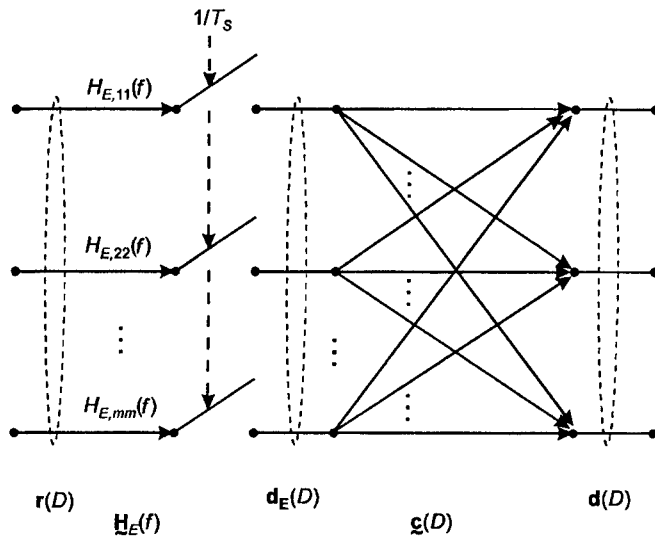


Abbildung 6.2: Frontend, Abtastung und linearer Teil des Backend eines MIMO-DFE-Empfängers: Das Frontend ist ein analoges Filter in reiner Diagonalstruktur, nach der Abtastung werden durch ein i. a. vollbesetztes Matrixfilter die Störsignale in sich und gegenseitig dekorreliert.

Man beachte, dass das Frontend-Empfangsfilter  $\tilde{\mathbf{H}}_E(f)$  als Bestandteil des Terms auf der linken Seite einen essenziellen Beitrag zur Begrenzung der wirksamen Störleistung liefert.

$\mathbf{h}_N(D)$  in (6.3) kann hier also als spektrale Faktorisierung der LDS-Matrix der Störung (siehe Abschnitt 3.1.1.4) dimensioniert werden, so dass  $\mathbf{h}_N(D)$  minimalphasig ist. Damit wird das Ausgangssignal  $\mathbf{d}(D)$  durch eine reine Feedback-Struktur entzerrbar.

### 6.1 MIMO-Übertragungssysteme mit DFE-Empfänger

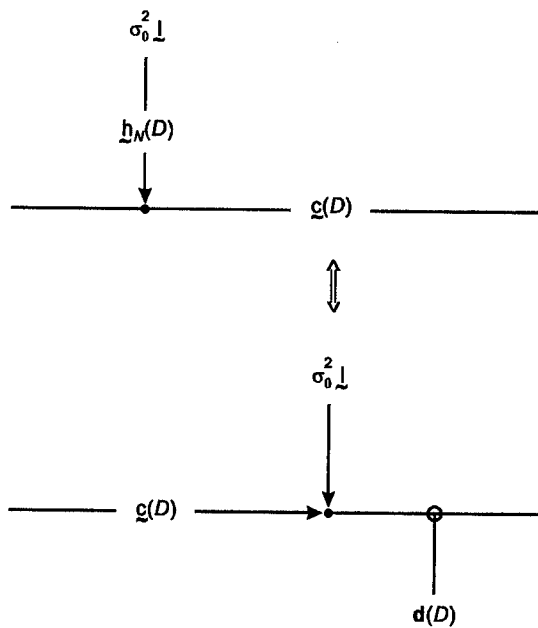


Abbildung 6.3: Zeitdiskretes Ersatzschaltbild für das mehrdimensionale WMF.

#### 6.1.2 Der rückgekoppelte Teil des Backends

Der rückgekoppelte Teil des Backends hat die in Abb. 6.4 gezeigte Struktur. Für den ersten Koeffizienten von  $\tilde{b}(D)$  gilt darüber hinaus die örtliche Kausalitätsbedingung nach Abb. 6.1, d. h.

$$\tilde{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 & b_{12,0} & \dots & b_{1m-1,0} & b_{1m,0} \\ 0 & 0 & b_{23,0} & & b_{2m,0} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{m-1m,0} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

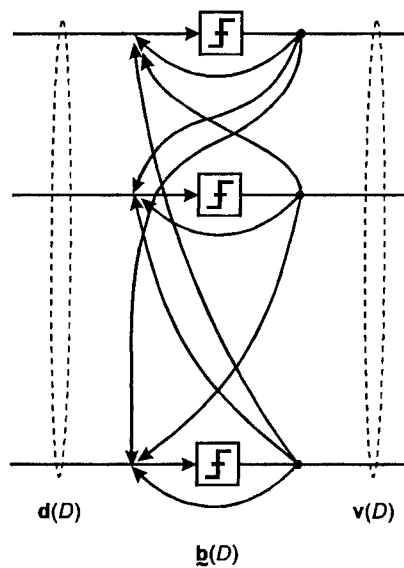


Abbildung 6.4: Allgemeine Struktur des rückgekoppelten Teils des Backends eines MIMO-DFE-Empfängers.

Das Feedback-Filter  $\tilde{b}(D)$  lässt sich nun genau wie bei zweidimensionalen CAP-Systemen [MT94] berechnen:

$$\tilde{\mathbf{b}}(D) = \tilde{\mathbf{c}}(D) - \text{diag}(c_{11,0} \quad c_{22,0} \quad \dots \quad c_{mm,0}) \quad (6.5)$$

Unter der Annahme fehlerfreier Entscheidungen kompensiert damit das durch  $\tilde{b}(D)$  rückgekoppelte Signal perfekt die durch das Dekorrelationsfilter  $\tilde{c}(D)$  erzeugten Impulsnachläufer (für einen detaillierten Beweis siehe z. B. [MT94]). Da entschiedene Werte an den Eingang der Diskriminatoren zurückgekoppelt werden, wird hier keine Störkomponente addiert. Aus dem Umstand, dass die Kanalkapazität unterschiedliche Sendeleistungen erfordert, folgen i. a. unterschiedliche Stufenhöhen für die einzelnen Diskriminatoren.



### 6.1.3 Signalstörabstand und Kanalkapazität

Im resultierenden Ersatzschaltbild eines verzerrungsfreien Kanals treten somit  $m$  unabhängige Störquellen mit jeweils identischer Leistung  $\sigma_0^2$  auf. Die Nutzleistungen werden durch die Diagonalelemente  $c_{ii,0}$  des Subtrahenden in Gleichung (6.5) bestimmt. Für das  $i$ -te Subsystem ergibt sich also das SNR:

$$\rho_i = \frac{S_{S,i} c_{ii,0}^2}{\sigma_0^2}, \quad (6.6)$$

wobei  $S_{S,i}$  die aufgewendete Sendeleistung ist. Das mittlere SNR über alle Subsysteme wird sinnvollerweise als harmonisches Mittel gebildet, das mit dem arithmetischen Mittel der Teilkapazitäten der Kanäle korrespondiert:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt[m]{\prod_{i=1}^m \rho_i} \\ &= \frac{1}{\sigma_0^2} \sqrt[m]{\prod_{i=1}^m S_{S,i} c_{ii,0}^2} \\ &= \frac{S_S}{m\sigma_0^2} \sqrt[m]{\prod_{i=1}^m c_{ii,0}^2} \end{aligned} \quad (6.7)$$

$S_S$  ist die aufgewendete Gesamtsendeleistung.

Unter der o.B.d.A. anzunehmenden Voraussetzung, dass der nullte Term  $\mathbf{h}_{N,0}$  des Störungsfärbungsfilters als obere Dreiecksmatrix gewählt wird, gilt offensichtlich:

$$\prod_{i=1}^m c_{ii,0} = 1 / \det \tilde{\mathbf{h}}_{N,0} \quad (6.8)$$

Zur Bestimmung des Wertes der rechten Seite dieser Gleichung wird  $\tilde{\mathbf{h}}_N(D)$  zweckmäßigerweise über den Zwischenschritt des Cepstrums durch spektrale Faktorisierung aus der Korrelationsmatrix  $\tilde{\ell}_n(D)$  der Störung berechnet [MT94]:

$$\det \tilde{\ell}_n(D) = \det \tilde{\mathbf{h}}_N^T(D) L_0 \tilde{\mathbf{h}}_N^*(D^{*-1}) \quad (6.9)$$

$$= L_0 \det \tilde{\mathbf{h}}_N^T(D) \det \tilde{\mathbf{h}}_N^*(D^{*-1}) \quad (6.10)$$

## 6 MIMO-Übertragungssysteme im Zeitbereich

Das Cepstrum wird durch Logarithmierung von  $\det \tilde{\ell}_n(D)$  gebildet. Entwickelt man das Ergebnis in eine Fourierreihe, so bilden die positiven Koeffizienten der Fourier-Reihe den kausalen, die negativen den antikausalen Anteil. Durch Rücktransformation könnte auf diesem Wege  $\tilde{\mathbf{h}}_N(D)$  bestimmt werden. Wir sind jedoch hier nur an dem nullten Term  $\tilde{\mathbf{h}}_{N,0}$  des kausalen Anteils interessiert, der offensichtlich der Hälfte des nullten Koeffizienten der Fourier-Reihe entspricht, wenn man die andere Hälfte dieses Koeffizienten symmetrisch dem antikausalen Anteil  $\tilde{\mathbf{h}}_N^*(D^{*-1})$  zuschlägt:

$$\ln \det \tilde{\mathbf{h}}_{N,0} = \frac{T_s}{2} \int_{-1/2T_s}^{1/2T_s} \ln \det \tilde{\ell}_N(e^{j2\pi f T_s}) df \quad (6.11)$$

Setzt man die Gleichungen (6.11) und (6.8) in (6.7) ein, so erhält man den Zusammenhang zwischen Störungskorrelation und SNR:

$$\rho = \frac{S_s}{m\sigma_0^2} \exp \left( -\frac{T_s}{m} \int_{-1/2T_s}^{1/2T_s} \ln \det \tilde{\ell}_N(e^{j2\pi f T_s}) df \right) \quad (6.12)$$

### Transinformation bei gegebenem Sendespektrum

Zur Beurteilung der Beziehung von (6.12) zur Kapazität kann man Gleichung (5.14) in Gleichung (5.13) einsetzen und erhält als maximale Transinformation eines MIMO-Kanals mit gegebener Sendeleistungsdichte:

$$C_{L_s} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \log \left( 1 + \frac{L_{s,ii}(f)}{\lambda_{ii}(f)} \right) df \quad (6.13)$$

Die Vertauschung von Summation, Integration und Logarithmierung liefert:

$$C_{L_s} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \log \prod_{i=1}^m \left( 1 + \frac{L_{s,ii}(f)}{\lambda_{ii}(f)} \right) df \quad (6.14)$$

Da  $\lambda_{ii}(f)$  die Eigenwerte von  $\tilde{\mathbf{H}}_K^{1T}(f) \tilde{\mathbf{H}}_N^T(f) L_0 \tilde{\mathbf{H}}_N(f) \tilde{\mathbf{H}}_K^{1*}(f)$  sind, und die Sendeleistungsdichtematrix als rein diagonal angenommen wird, gilt:

$$C_{L_s} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \log \det \left( \tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{L}}_s(f) (\tilde{\mathbf{H}}_K^{1T}(f) \tilde{\mathbf{H}}_N^T(f) L_0 \tilde{\mathbf{H}}_N(f) \tilde{\mathbf{H}}_K^{1*}(f))^{-1} \right) df \quad (6.15)$$

### 6.1 MIMO-Übertragungssysteme mit DFE-Empfänger

Beschreiben wir den verzerrenden Kanal durch ein äquivalentes Kanalmodell mit verzerrungsfreiem Kanal und farbiger Störung mit Leistungsdichtematrix  $\tilde{L}_n(f)$ , vereinfacht sich (6.15) zu:

$$C_{L_s} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \log \det (\mathbf{I} + \tilde{L}_s(f) \tilde{L}_n^{-1}(f)) df \quad (6.16)$$

#### Real erreichbare Bitrate

Zur Herstellung einer Beziehung zwischen dem SNR (6.12) des MIMO-DFE-Systems und der Kanalkapazität gemäß (6.16) folgen wir der Argumentation von Price [Pri72] im Falle der SISO-DFE. Danach beträgt das erforderliche SNR für eine Symbolfehlerwahrscheinlichkeit von  $10^{-5}$  näherungsweise  $6 \cdot 2^{2b}$ , wobei  $b$  für die Anzahl Bit je PAM-Symbol steht. Bei einem MIMO-System ist entsprechend durch die Anzahl  $m$  der Dimensionen zu dividieren, woraus für das erforderliche SNR folgt:

$$\rho = 6 \cdot 2^{2bm^{-1}} \quad (6.17)$$

Zum Vergleich mit der Kapazität ist die Bitrate  $R_B = b/T_S$  von Interesse:

$$R_B = \frac{m \log_2(\rho/6)}{2T_S} \quad (6.18)$$

Einsetzen des SNR gemäß Gleichung (6.12) liefert:

$$R_B = \frac{1}{2} \int_{-1/2T_S}^{1/2T_S} \log_2 \left( \left( \frac{S_s}{6m\sigma_0^2} \right)^D \det \tilde{L}_N^{-1}(e^{j2\pi f T_S}) \right) df \quad (6.19)$$

In gleicher Weise wie in [Pri72] lässt sich zeigen, dass bei einer rein diagonalen und im Bereich  $-1/(2T_S) \leq f \leq 1/(2T_S)$  konstanten Sendeleistungsdichtematrix  $R_B$  aus (6.19) genau dann den Wert der Kapazität aus Gleichung (6.16) annimmt, wenn die sechsfache Sendeleistung aufgewendet wird. Damit beträgt der Abstand eines uncodierten MIMO-DFE-Systems von der Kapazität bei einer Fehlerwahrscheinlichkeit von  $10^{-5}$  ca. 7,78 dB, was exakt dem entsprechenden Wert beim AWGN-Kanal entspricht. Hinsichtlich der Ausgangsposition vor der Anwendung einer Kanalcodierung besteht also kein Unterschied zwischen einem MIMO-DFE-System und  $m$  parallelen AWGN-Kanälen.

## 6.2 Aufwand

In diesem Abschnitt wollen wir Maßzahlen für den technischen Aufwand der Realisierung eines MIMO-Systems mit Entzerrung bzw. Störungsdekorrelation im Zeitbereich ableiten. Von Interesse sind dabei:

- Die absolut erforderliche Anzahl von Operationen je übertragenem Bit als Maß für die Realisierbarkeit und die Kosten.
- Die erforderliche Anzahl an Operationen je Bit im Vergleich zu den im nächsten Kapitel diskutierten Frequenzbereichs-Entzerrern als Kriterium für die System-Entscheidung.
- Die Abhängigkeit des Aufwands von Systemeigenschaften wie:
  - Länge der Impulsantworten und damit erforderliche Filterlängen,
  - Dimensionalität des MIMO-Systems.

Dabei beschränken wir uns auf die Erfassung jener Operationen, die strikt im Symboltakt bzw. Bittakt durchgeführt werden müssen und somit einer harten Echtzeitbedingung (siehe z. B. [CM96]) unterliegen. Adaptions- und Optimierungsalgorithmen, die entweder in der Initialisierungsphase ablaufen oder eine Anpassung des Systems an sich langsam ändernde Kanaleigenschaften ermöglichen, können entkoppelt vom Symboltakt realisiert werden und werden demzufolge hier nicht zum Aufwand gerechnet.

### 6.2.1 Definition des Aufwands

Sender und Empfänger dürfen grundsätzlich mit Methoden der digitalen Signalverarbeitung, entweder in Form Digitaler Signalprozessoren oder als digitale Schaltungen, realisiert werden. Folglich ist die Basisoperation der digitalen Signalverarbeitung, *multiply-accumulate*, das geeignete Aufwandsmaß. Jede Stufe eines FIR-Filters zählt somit als eine MAC-Operation mit Aufwand  $a_{MAC}$ , vgl. hierzu z. B. [Mat98].

## 6.2 Aufwand

Der Vollständigkeit halber sind darüber hinaus die erforderlichen Operationen für reine Addition und die Detektion von Signalpunkten (Diskriminator) zu berücksichtigen. Für eine reine Addition oder einen Vergleich mit Entscheidung sei der Aufwand  $a_0$  einer simplen Operation erforderlich. Für die Auswahl eines aus  $N$  Signalpunkten sind in der Regel vier simple Operationen erforderlich (Skalierung, Verschiebung, Division durch den Abstand der Entscheidungsschwellen, Normalisierung).

Der Gesamtaufwand  $A$  ergibt sich als Summe der erforderlichen MAC-Operationen und der simplen Operationen bezogen auf die Anzahl der damit übertragenen Bits. Innerhalb eines Beobachtungsintervalls  $T_a$  gilt also:

$$A = \frac{n_0 a_0 + n_{MAC} a_{MAC}}{R_B T_a}, \quad (6.20)$$

wobei  $R_B$  die übertragene Bitrate ist.

Im Falle der Realisierung mit einem DSP ist  $a_0 = a_{MAC}$  zu setzen (beide Operationen benötigen einen CPU-Takt), während bei der Realisierung als Schaltung der spezifische Bedarf an Chip-Fläche zu berücksichtigen ist. Im Allgemeinen dürfte dann  $a_{MAC} \gg a_0$  sein.

### 6.2.2 DFE-Systeme für das Basisband

Bei einem Übertragungssystem entsprechend 6.1 entsteht der Bedarf nach Rechenleistung an folgenden Stellen:

**Sendefilter** Bei einer digitalen Realisierung ist hier jeder gesendete Amplitudenkoeffizient mit dem Sendegrundimpuls zu gewichten. Unabhängig von der gewählten Upsample-Rate (Anzahl der Stützstellen des Sendegrundimpulses je Symbol) sind hier  $n_s$  MAC-Operationen nötig, wenn sich der Sendegrundimpuls insgesamt über  $n_s$  Symbole erstreckt. In einem  $m$ -dimensionalen System sind  $m$  Sendefilter enthalten. Pro Symbol sind also  $mn_s$  MAC-Operationen erforderlich.

**Linearer Teil des Empfänger-Backends** Das Dekorrelationsfilter (vgl. Abschnitt 6.1.1) ist i. a. ein voll besetztes Matrix-Filter und besteht aus

## 6 MIMO-Übertragungssysteme im Zeitbereich

$m^2$  einzelnen FIR-Filtern mit der Länge  $n_c$ , entsprechend  $m^2 n_c$  MAC-Operationen je Symbol.

Für die Gewinnung jedes der  $m$  Ausgangssignale werden die Ergebnisse von  $m$  Filtern addiert. Dies verursacht einen Aufwand von  $m(m - 1)$  simplen Operationen.

**Rückgekoppelter Teil des Empfänger-Backends** Für die Feedback-Filter (vgl. Abschnitt 6.1.2) ist im Wesentlichen derselbe Aufwand erforderlich wie für die Vorwärts-Filter im linearen Teil. Der Umstand, dass die Hälfte der Filter keinen nullten Koeffizienten hat (örtliche Kausalität), soll hier vernachlässigt werden.

Für die Entscheidung (Diskriminatoren) werden insgesamt  $4m$  simple Operationen benötigt. Für den rückgekoppelten Teil ergibt sich also ein Aufwand von  $m^2 n_b a_{MAC} + m(m + 3)a_0$ . Die Länge der Feedback-Filter  $n_b$  wird man i. a. gleich der Länge der Vorwärtsfilter  $n_c$  wählen.

Insgesamt ergibt sich also folgender Aufwand:

$$\begin{aligned}
 A_{DFE}(m) &= A_s(m) + A_c(m) + A_b(m) \\
 &= (mn_s a_{MAC} + \\
 &\quad + m^2 n_c a_{MAC} + m(m - 1)a_0 + \\
 &\quad + m^2 n_b a_{MAC} + m(m + 3)a_0) / (R_B T_S) \\
 &= \frac{(m^2(n_b + n_c) + mn_s)a_{MAC} + (2m^2 + 2m)a_0}{R_B T_S} \quad (6.21)
 \end{aligned}$$

Der Aufwand steigt also quadratisch mit der Dimensionalität des MIMO-Systems, dagegen nur linear mit den verwendeten Filterlängen. Im Verhältnis zu einem heute problemlos realisierbaren CAP-System (entsprechend einem zweidimensionalen MIMO-System) fiel folglich bei einem 10-dimensionalen MIMO-System etwa der  $10^2/2^2 = 25$ -fache Aufwand, bei einem 50-dimensionalen MIMO-System etwa der  $50^2/2^2 = 625$ -fache Aufwand an.

## 7 MIMO-Übertragungssysteme im Frequenzbereich

In Analogie zum vorangehenden Kapitel soll hier die Realisierung der Entzerrung bzw. Störungsdekorrelation eines MIMO-Systems im Frequenzbereich diskutiert werden. Die Realisierung im Frequenzbereich erfolgt stets durch Anwendung eines Vielträgerverfahrens, wodurch die nutzbare Bandbreite in eine Vielzahl schmalbandiger (Teil-) Kanäle unterteilt wird. Asymptotisch werden diese Kanäle verzerrungsfrei mit in sich und untereinander unkorrelierter Störung. Im Bereich der Übertragung im Ortsanschlussleitungsnetz werden Vielträgerverfahren technisch durch Discrete multi-tone (DMT)-Modulation verwirklicht. Dies ermöglicht eine verhältnismäßig aufwandsgünstige Realisierung.

Es ist leicht zu zeigen, dass Vielträgerverfahren mit Frequenzbereichsentzerrung die Kanalkapazität erreichen. Asymptotisch, d. h. für hohe Kanalzahl, gilt dies auch für DMT-Modulation. Wir werden diesen Zusammenhang im Folgenden zunächst für SISO-Systeme kurz rekapitulieren. Besonders interessant, bisher aber in der Literatur nicht diskutiert, ist die Anwendung der DMT-Modulation im MIMO-Kontext. Neben dem direkten Bezug zur Kanalkapazität ermöglicht sie eine konkurrenzlos aufwandsgünstige Realisierung großer MIMO-Systeme.

### 7.1 Discrete multi-tone Modulation

Eine ausführliche und systematische Behandlung der Wirkungsweise der DMT-Modulation findet sich z. B. in [Fis96]. Sie soll hier nur insoweit dargestellt werden, wie dies für die Einordnung der DMT-Modulation als inhärentes MIMO-System, die daraus abgeleitete Herstellung des Bezuges zur Kanalkapazität und den Übergang zu MIMO-Systemen mit DMT-Subsystemen erforderlich ist.

## 7 MIMO-Übertragungssysteme im Frequenzbereich

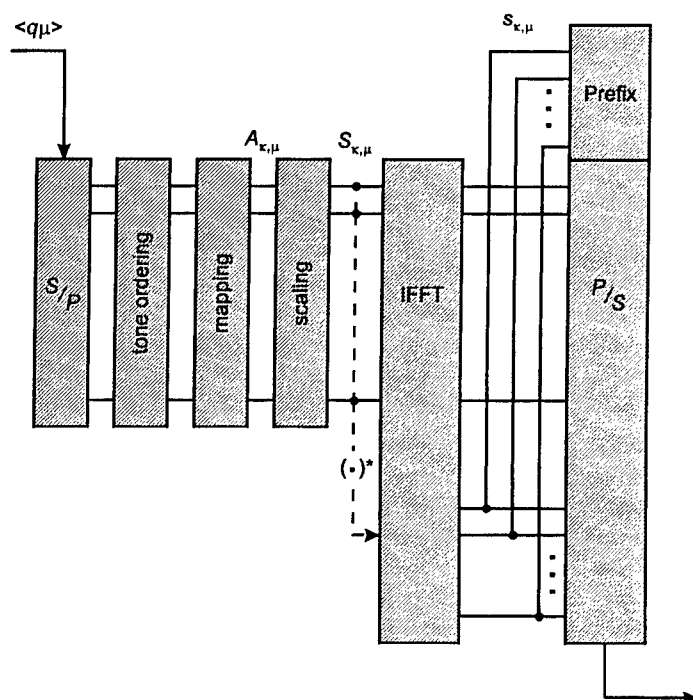


Abbildung 7.1: Aufbau eines DMT-Senders



### 7.1.1 Grundsätzlicher Aufbau eines DMT-Systems

Abbildung 7.1 zeigt den Aufbau eines DMT-Senders. Ein digitales, seriell-parallel-Wandlung in  $n_b$  parallele Kanäle aufgeteilt (*tone ordering*). Der Kanal  $\kappa$  trägt hierbei Symbole mit  $b_\kappa$  Bits. Den Symbolen werden anschließend getrennt je Kanal Amplitudenkoeffizienten aus einer QAM- oder Cross-Konstellation mit  $2^{b_\kappa}$  Signalpunkten zugewiesen (*mapping*). Die Skalierung der Amplitudenkoeffizienten (*scaling*) ermöglicht die Feinabstimmung der Leistung je Kanal. Der aus den solchermaßen gewonnenen Werten  $S_{\kappa,\mu}$  gebildete Vektor  $\mathbf{S}_\mu$  kann als Beschreibung eines periodisch gedachten Sendesignals

$$s_p(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{2n_b} s_{\kappa,\mu} \delta(t - \kappa T_S - 2\nu n_b T_S) \quad (7.1)$$

im Frequenzbereich verstanden werden. Zur Bildung eines reellen Sendesignals sind die  $n_b$  Kanäle um die konjugiert komplexen Werte zu ergänzen, so dass gilt:

$$\mathbf{s}_\mu = \text{DFT}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{S}_\mu^* \\ \mathbf{S}_\mu \end{pmatrix} \right\} \quad (7.2)$$

$\mathbf{S}$  bezeichnet dabei die gespiegelte Version von  $\mathbf{S}$ .

Wird dieses periodische Sendesignal  $s_p(t)$  über einen verzerrenden Kanal mit Impulsantwort  $h_K(t)$  übertragen, stellt sich ein ebenfalls periodisches Empfangssignal

$$r_p(t) = s_p(t) * h_K(t) \quad (7.3)$$

ein. Sei  $r_\mu$  ein Vektor von  $2n_b$  Abtastwerten im Abstand  $T_S$  von  $r_p(t)$  und  $h_{K,\mu}$  ein gleichermaßen gewonnener Vektor von Abtastwerten der Kanalimpulsantwort. Falls  $h_K(t)$  kausal ist und

$$h_K(t) = 0 \quad \forall t > 2n_b T_S \quad (7.4)$$

gilt, können durch Diskrete Fourier-Transformation und Entzerrung im Frequenzbereich die gesendeten Amplitudenkoeffizienten fehlerfrei wiedergewonnen

## 7 MIMO-Übertragungssysteme im Frequenzbereich

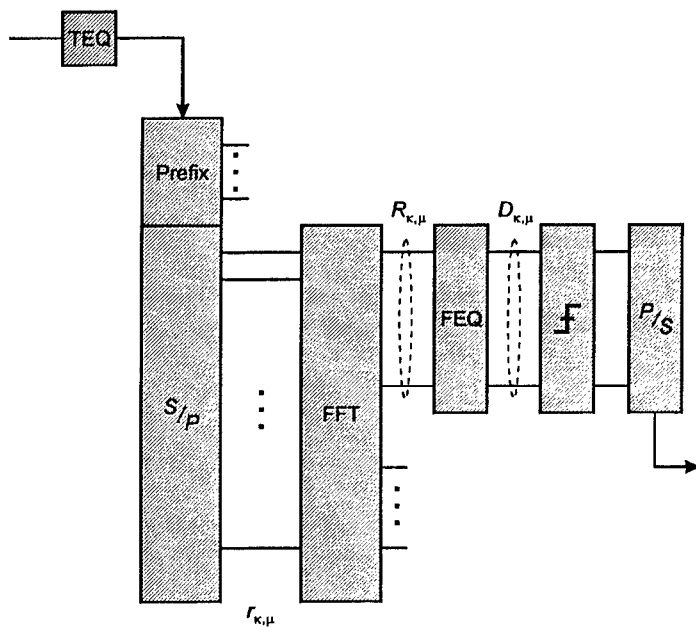


Abbildung 7.2: Aufbau eines DMT-Empfängers

## 7.1 Discrete multi-tone Modulation

nen werden<sup>1</sup>, vgl. Abb. 7.2:

$$\mathbf{R}_\mu = DFT\{\mathbf{r}_\mu\} \quad (7.5)$$

$$\mathbf{H}_{K,\mu} = DFT\{\mathbf{h}_{K,\mu}\} \quad (7.6)$$

$$D_{K,\mu} = R_{K,\mu} / H_{K,\mu} = A_{K,\mu} \quad (7.7)$$

Gleichung (7.7) beschreibt hierbei formal den *Frequency-domain Equalizer* FEQ. Aufgrund der Verwendung der DFT ist Gleichung (7.7) nur dann eine Inversion von (7.3), wenn das Empfangssignal periodisch ist. Dann wird aus (7.3) eine diskrete zyklische Faltung im Zeitbereich, und (7.7) ist die dazu inverse Operation im diskreten Frequenzbereich.

### 7.1.2 Periodizität und Cyclic Prefix

Die Forderung nach Periodizität des Empfangssignals bedeutet in der Konsequenz, dass alle Vektoren  $\mathbf{A}_\mu$  und damit auch die Quelldaten für jeden Block gleich sein müssen, was in der Praxis natürlich eine unsinnige Einschränkung bedeutet. Tatsächlich ist es ausreichend, wenn das Ergebnis der Faltung (7.3) innerhalb des Zeitfensters des betrachteten FFT-Blocks dem einer zyklischen Faltung gleicht. Um dies zu erreichen genügt es, den Ergebnisvektor  $\mathbf{s}_\mu$  der senderseitigen FFT mit einem sog. *Cyclic Prefix* zu versehen, das einfach die  $n_p$  letzten Werte des Vektors diesem noch einmal voranstellt (siehe Abb. 7.1). Damit wirkt die lineare Faltung (7.3) innerhalb des Zeitfensters des empfängerseitigen FFT-Blocks so, als wäre das Sendesignal periodisch.

Voraussetzung dafür ist, dass der Einschwingvorgang der Kanalimpulsantwort vollständig innerhalb der Zeitdauer des Cyclic Prefix stattfindet [Wüt99]. Das heißt: das Cyclic Prefix muss mindestens so lang wie die Abklingzeit der Kanalimpulsantwort sein, entsprechend der Bedingung (7.4).

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, können also die  $n_b$  Kanäle eines DMT-Systems als unabhängige, parallele SISO-Kanäle mit unkorrelierten Störungen [Fis96] angesehen werden. Das Cyclic Prefix führt zu einem Ratenverlust

$$\phi_p = n_p / (2n_b + n_p) \quad (7.8)$$

durch Übertragung von Redundanz.

<sup>1</sup>Der Übersichtlichkeit halber wird o.B.d.A. hier angenommen, dass die senderseitigen Scaling-Faktoren alle gleich eins sind.

## 7.2 SISO-DMT-Systeme und die Kapazität

Die erreichbare Transinformation eines SISO-DMT-Systems ergibt sich als Summe der Transinformationen der einzelnen Kanäle. Bei einer Sendeleistung  $S_\kappa$  im  $\kappa$ -ten Kanal und einer Störleistungsdichte  $L_n(f)$  ist für hinreichend kleine Kanalbandbreiten  $B_\kappa$  die erreichbare Transinformation gegeben durch:

$$C_\kappa = \frac{\phi_p}{T_S} \log_2 \left( 1 + \frac{S_\kappa}{\int_{B_\kappa} L_n(f) df} \right) \quad (7.9)$$

Setzt man die Sendeleistung in einem Kanal gleich dem Produkt aus einer Sendeleistungsdichte  $L_s(f)$  und der Kanalbandbreite, erhält man durch Aufsummieren über alle Kanäle:

$$C_{DMT,SISO} = \frac{\phi_p}{T_S} \sum_{\kappa} \log_2 \left( 1 + \frac{L_s(f_\kappa) B_\kappa}{\int_{B_\kappa} L_n(f) df} \right) \quad (7.10)$$

Für eine gegen unendlich gehende Kanalzahl und damit infinitesimal kleinen Kanalbandbreiten  $B_\kappa \rightarrow 0$  wird daraus:

$$C_{DMT,SISO} = \frac{\phi_p}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \log_2 \left( 1 + \frac{L_s(f)}{L_n(f)} \right) df \quad (7.11)$$

Offensichtlich geht (7.11) bei passend gewählter Sendeleistungsdichte bis auf den Ratenverlust  $\phi_p$  gemäß (7.8) in die Gleichung (5.1) für die Kapazität des verzerrenden SISO-Kanals über. Da  $\phi_p$  mit der Kanalzahl  $n_b$  abnimmt, erreichen DMT-Systeme asymptotisch für  $n_b \rightarrow \infty$  die Kanalkapazität.

## 7.3 MIMO-DMT-Systeme

Für die Konstruktion eines MIMO-DMT-Systems gehen wir davon aus, dass alle  $m$  DMT-Systeme gleiche – hinreichend hohe – Kanalzahl  $n_b$  haben und bezüglich des Beginns eines FFT-Blocks synchronisiert sind. Wir betrachten das Kanalmodell in Abb. 7.3.

### 7.3 MIMO-DMT-Systeme

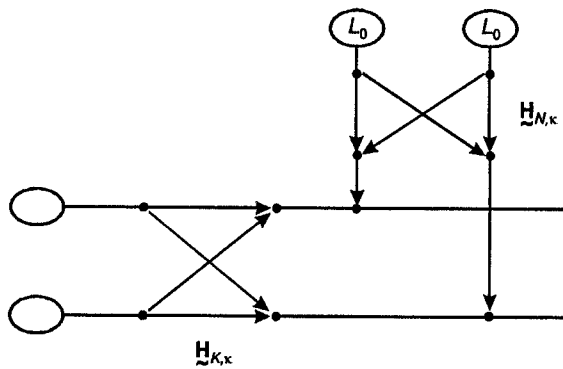


Abbildung 7.3: Modell eines MIMO-DMT-Systems: Nur gleiche Kanäle verschiedener Subsysteme interferieren und weisen korrelierte Störung auf.

#### 7.3.1 Kanalmodell

Das gesamte MIMO-Modell kann entlang der Frequenzachse in  $n_b$  parallele MIMO-Teilkanäle zerlegt werden. Diese MIMO-Teilkanäle sind wegen der vollständig disjunkten Teilung der Frequenzachse sowohl hinsichtlich der Nutzsignale als auch hinsichtlich der Störung voneinander völlig unabhängig. Wir können uns also auf die Betrachtung eines repräsentativen Teilkanals  $\kappa$  beschränken. Aufgrund der infinitesimal kleinen (in jedem Falle aber hinreichend kleinen) Bandbreite  $b_\kappa$  sind Kanal-Übertragungsfunktion und Störfärbungsmatrix gedächtnislos, d. h. nur mit skalaren Werten besetzt, vgl. Abb 7.3.

#### 7.3.2 Empfängerkonzept

Der Empfänger hat zwei Aufgaben zu bewältigen:

1. Die (Teil-) Kanalübertragungsmatrix  $H_{K,\kappa}(f)$  muss entzerrt werden.
2. Die Störungen am Eingang der Entscheider müssen dekorreliert werden.

## 7 MIMO-Übertragungssysteme im Frequenzbereich

Die erste Aufgabe kann in einfacher Weise durch einen Frequenzbereichs-Entzerrer in Kreuzstruktur gelöst werden, vgl. Abb. 7.4.

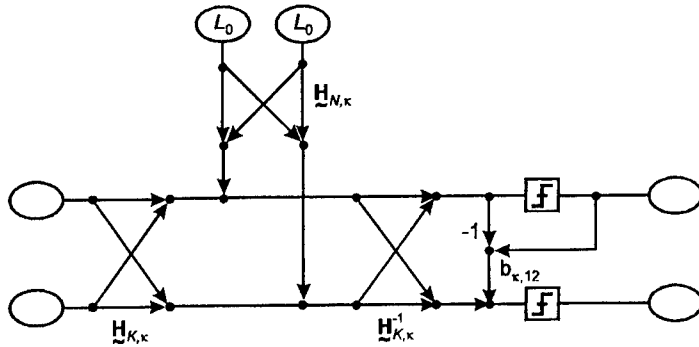


Abbildung 7.4: Empfänger mit Entzerrung im Frequenzbereich (FEQ) und örtlich kausaler Störungskorrelation.

Zur Dekorrelation der Störung kann in bewährter Weise Entscheidungsrückkopplung angewandt werden. Hier ist zu beachten, dass

- nur eine statische Korrelation vorliegt, d.h. nur ein skalarer Wert ohne Gedächtnis rückgekoppelt wird,
- die örtliche Kausalität (vgl. Abschnitt 6.1) gewahrt bleibt.

Die wirksame Störung am Eingang der Diskriminatoren wird durch die Störleistungs-Korrelationsmatrix

$$\ell_n(D) = \tilde{\mathbf{h}}_K^{1T}(D) \tilde{\mathbf{h}}_N^T(D) L_0 \tilde{\mathbf{h}}_K^{1*}(D) \tilde{\mathbf{h}}_N^*(D) \quad (7.12)$$

beschrieben. Im hier vorliegenden statischen Fall existiert davon nur der nullte Koeffizient:

$$\ell_{n,0} = \tilde{\mathbf{h}}_{K,0}^{1T} \tilde{\mathbf{h}}_{N,0}^T L_0 \tilde{\mathbf{h}}_{K,0}^{1*} \tilde{\mathbf{h}}_{N,0}^* \quad (7.13)$$

## 7.4 Realisierungsaufwand

$\tilde{\ell}_{n,0}$  kann in eine obere rechte Dreiecksmatrix  $\tilde{\mathbf{b}}$  faktorisiert werden:

$$\tilde{\ell}_{n,0} = \tilde{\mathbf{b}}^T \tilde{\mathbf{b}}^* \quad (7.14)$$

$\tilde{\mathbf{b}}$  wird nun – wie in Abb. 7.4 für ein zweidimensionales MIMO-System dargestellt – zur Prädiktion der Störung im Subsystem  $k$  aus den detektierten Werten der Subsysteme  $1 \dots k-1$  genutzt. Die effektiv wirksamen Störabstastwerte an den Eingängen der Diskriminatoren sind damit unkorreliert.

## 7.4 Realisierungsaufwand

Entsprechend der Vorgehensweise in Abschnitt 6.2 wollen wir hier eine Bewertung des erforderlichen Aufwands für die Realisierung eines MIMO-Systems mit DMT-Modulation vornehmen.

### 7.4.1 Aufwand eines SISO-DMT-Systems

Es soll zunächst der Aufwand für ein eindimensionales DMT-System hergeleitet werden. Im nachfolgenden Abschnitt werden dann die zusätzlich erforderlichen Komponenten für MIMO-Systeme bewertet.

**Time-domain Equalizer (TEQ)** Der TEQ dient zur Verkürzung der Kanalimpulsantwort auf die Länge des Cyclic Prefix. Der Aufwand für einen TEQ in Transversalstruktur der Ordnung  $n_{TEQ}$  beträgt bei Filterung eines kompletten FFT-Blocks mit  $N$  Werten:

$$A_{TEQ} = \frac{n_{TEQ} N a_{MAC}}{R_{B,SISO} T_s} \quad (7.15)$$

**FFT** Bei der diskreten Fourier-Transformation (DFT) mittels FFT (Fast Fourier Transform) wird ein Vektor der Länge  $N = 2^{n_b}$  in  $N/2$  Paare zerlegt, die einzeln einer  $2 \times 2$ -DFT unterzogen werden. Die Ergebnisse werden in  $n_b/2 - 1$  weiteren Stufen erneut paarweise diskret Fourier-transformiert.

## 7 MIMO-Übertragungssysteme im Frequenzbereich

Setzt man den Aufwand einer einzelnen  $2 \times 2$ -DFT mit  $2a_0 + 4a_{MAC}$  an, gilt für eine  $N$ -Punkte-FFT [Wei97]:

$$A_{FFT} = \frac{(a_0 + 2a_{MAC})N \log_2 N}{R_{B,SISO}T_S} \quad (7.16)$$

In heutigen, kommerziell eingesetzten DMT-Systemen ist  $N = 512$ .

**Frequency-domain Equalizer (FEQ)** Im FEQ wird nach der FFT jeder demodulierte Wert mit einem komplexen Verstärkungsfaktor multipliziert. Berücksichtigt man Real- und Imaginärteil, entspricht dies einem Aufwand von 4 MAC-Operationen je Kanal, bei einer  $N$ -Punkte-FFT:

$$A_{FEQ} = \frac{2Na_{MAC}}{R_{B,SISO}T_S} \quad (7.17)$$

Man beachte, dass nur die Hälfte des Ausgangs der FFT entzerrt wird, die andere Hälfte ist konjugiert komplex und trägt keine Information.

**Entscheidung** Der in Abschnitt 6.2.1 abgeleitete Aufwand für die Auswahl eines Signalpunktes muss hier je Kanal doppelt, jeweils für Real- und Imaginärteil, erbracht werden. Für  $N/2$  Kanäle (entsprechend einer  $N$ -Punkte FFT) ergibt sich:

$$A_E = \frac{4Na_0}{R_{B,SISO}T_S} \quad (7.18)$$

Der Gesamtaufwand hängt stark von der Größe der FFT  $N$  ab. Dabei darf nicht übersehen werden, dass die Länge des Beobachtungsintervalls  $T_a$  für die Ermittlung des Aufwands bei gegebener Bandbreite proportional zu  $N$  ist:

$$T_a = NT_S \quad (7.19)$$

Berücksichtigt man, dass die FFT sowohl im Sender als auch im Empfänger benötigt wird, ergibt sich für den Aufwand:

$$\begin{aligned} A_{DMT,SISO} &= A_{TEQ} + 2A_{FFT} + A_{FEQ} + A_E \\ &= \frac{Nn_{TEQ}a_{MAC} + 2(a_0 + 2a_{MAC})N \log_2 N + 2Na_{MAC} + 4Na_0}{R_{B,SISO}T_a} \\ &\approx \frac{n_{TEQ}a_{MAC} + 2(a_0 + 2a_{MAC}) \log_2 N + 2(2a_0 + a_{MAC})}{R_{B,SISO}T_S} \\ &= \frac{(4 \log_2 N + n_{TEQ} + 2)a_{MAC} + (2 \log_2 N + 4)a_0}{R_{B,SISO}T_S} \end{aligned} \quad (7.20)$$



## 7.4 Realisierungsaufwand

Der Aufwand eines SISO-DMT-Systems steigt also vor allem logarithmisch mit der doppelten Kanalzahl  $N$ .

### 7.4.2 Aufwand eines MIMO-DMT-Systems

Bei einem  $m$ -dimensionalen MIMO-System ist zunächst je Subsystem der Aufwand eines SISO-DMT-Systems zu berücksichtigen. Dazu kommen für jedes Subsystem Frequency-domain Equalizer (FEQ) von den  $m - 1$  anderen Subsystemen, insgesamt also  $m(m - 1)$ . Der Aufwand für die kreuzweisen FEQs beträgt:

$$\begin{aligned} A_{FEQ}(m) &= \frac{m(m-1)2Na_{MAC}}{R_B T_a} \\ &= \frac{2m(m-1)a_{MAC}}{R_B T_S} \end{aligned} \quad (7.21)$$

Zusätzlich ist der Aufwand für die Störungsdekorrelation zu berücksichtigen. Dazu muss im Wesentlichen die Differenzbildung zur Ermittlung der Störab-tastwerte und die komplexwertige Multiplikation mit einer oberen Dreiecksmatrix realisiert werden:

$$A_{dekor}(m) = \frac{(2m^2 - m)a_{MAC} + (m-1)a_0}{R_B T_S} \quad (7.22)$$

Mit (7.20) erhalten wir (unter Vernachlässigung konstanter, von  $m$  unabhängiger Terme):

$$A_{DMT}(m) = \frac{(4m^2 + m(4\log_2 N + n_{TEQ} - 1))a_{MAC} + (2\log_2 N + 5)ma_0}{R_B T_S} \quad (7.23)$$

Der Vergleich von (7.23) mit dem Aufwand eines hinsichtlich der Leistungsfähigkeit vergleichbaren MIMO-DFE-Systems gemäß (6.21) zeigt einen starken Unterschied beim Koeffizienten des quadratischen Gliedes  $m^2$ : Während dieses bei DFE-Systemen mit der Summe der Längen von Vorwärts- und Feedback-Filter  $n_c + n_b$  gewichtet ist, weist das DMT-System hier nur ein Gewicht von vier auf. Gerade bei stark verzerrenden Kanälen gilt  $n_c + n_b \gg 4$ , so dass die

---

## 7 MIMO-Übertragungssysteme im Frequenzbereich

Komplexität eines MIMO-DMT-Systems nur einen Bruchteil jener eines ansonsten gleichwertigen MIMO-DFE-Systems beträgt.

Generell ist der quadratische Term im Aufwands unvermeidbar. Allerdings steigt auch die Kapazität und damit die erreichbare Bitrate  $R_B$  wesentlich stärker als linear mit der Anzahl der Subsysteme im Kontext.

## 8 Bewertung an einem Beispiel

In diesem Kapitel soll am Beispiel eines 100-paarigen Ortskabels mit bis zu 5 km Länge der durch Vergrößerung des Kontextes erreichbare Gewinn an Transinformation untersucht werden. Dem wird die Erhöhung des Aufwandes bei Anwendung von Zeitbereichsentzerrern entsprechend Abschnitt 6.2 bzw. Frequenzbereichsentzerrern gemäß Abschnitt 7.4 gegenüber gestellt.

### 8.1 Die Szenarien

#### 8.1.1 Kabelgrößen

Ein wesentlicher Parameter eines MIMO-Systems ist die Dimension. Entsprechend betrachten wir im Folgenden die Fälle:

**Sternvierer** Das einfachste denkbare MIMO-System ist zweidimensional. Technisch entspricht dies z. B. einem (einzeln verlegten) Sternvierer.

**Grundbündel** Als Beispiel für ein mäßig komplexes System wird ein 10-paariges Grundbündel betrachtet. Technisch ist es als Bündel von fünf Sternvierern realisiert. Daraus resultieren zwei Arten von Nebensprechbeziehungen: innerhalb der Sternvierer und zwischen Sternvierern.

**Hauptkabel** Ein 100-paariges Hauptkabel rundet die Auswahl nach oben hin ab. Das Hauptkabel ist als Bündel von zehn Grundbündeln realisiert. Daraus resultieren zwei weitere Arten von Nebensprechbeziehungen: zwischen Adern in benachbarten Grundbündeln und zwischen Adern in entfernt liegenden Grundbündeln.

### 8.1.2 Beschaltung

Es wird stets die vollständige Beschaltung aller Adern mit gleichartigen Systemen angenommen. Dabei unterscheiden wir zwischen reinem Fernnebensprechen (FEXT) und Fernnebensprechen mit zusätzlichem Nahnebensprechen (NEXT):

**FEXT** In diesem Szenario sind alle Systeme unidirektional, d. h. alle Sender sind auf der einen, alle Empfänger auf der anderen Seite des Kabels. In diesem Fall tritt kein Nahnebensprechen auf, vgl. Abschnitt 3.2.3. Technisch kommt diesem Szenario eine Übertragung mit stark unterschiedlichen Bitraten in beiden Richtungen nahe, wie dies z. B. bei ADSL oder Video on Demand der Fall ist.

**NEXT** Hier gehen wir von der vollen Beschaltung des Kabels in beiden Übertragungsrichtungen aus. Dabei wird für jedes Subsystem unabhängig vom betrachteten Kontext stets eine perfekte Kompensation des *eigenen* Echos (vgl. Abschnitt 3.2.3.1 auf Seite 35) vorausgesetzt.

Als unabhängig von Beschaltung und Kontext jederzeit vorhandene externe Störung wird – wie im Bereich der Telekom üblich – weißes Rauschen mit einer Rauschleistungsdichte von  $L_0 = -140$  dBm/Hz angesetzt.

### 8.1.3 Kontext

Folgende Kontexte werden untersucht:

#### 8.1.3.1 MIMO-Kontext

Alle Adermpaare des Kabels werden sender- und empfängerseitig gemeinsam betrachtet. Dies entspricht dem Optimalfall. Die Berechnung der Kapazität wurde in Kapitel 5 abgeleitet, geeignete Übertragungssysteme in den Kapiteln 6 und 7 beschrieben. Außer dem stets vorhandenen Rauschen treten keine externen Störungen auf.

## 8.1 Die Szenarien

### 8.1.3.2 SISO-Kontext

Dies entspricht der heute weitestgehend üblichen Sichtweise. Jedes Adernpaar wird sender- und empfängerseitig für sich betrachtet, alle anderen Adernpaare im Kabel wirken durch Nebensprechen als externe Störer.

### 8.1.3.3 Eingeschränkte Kontexte

Technisch interessant ist der Fall, dass ein komplexes Kabel in mehrere, unabhängige MIMO-Subsysteme zerlegt wird. Jedes dieser MIMO-Subsysteme hat dann einen eingeschränkten Kontext, in dem alle anderen MIMO-Subsysteme als externe Störer wirken. Eingeschränkte Kontexte werden im Folgenden als  $m_1 + (m - m_1)$  bezeichnet. Der erste Summand gibt die Dimension des MIMO-Subsystems an, der zweite die Anzahl der als externe Störer wirkenden Adernpaare.

Trotz der gegenseitigen Unabhängigkeit gehen wir hier von einer senderseitig optimalen Einstellung der Sendespektren aus. Im Regelfall werden die MIMO-Subsysteme hier also mit verschiedenen Sendespektren und Sendeleistungen arbeiten. Ein eingeschränkter Kontext 1+99 unterscheidet sich demgemäß durch die Sendespektren vom SISO-Kontext und erreicht entsprechend eine etwas höhere Transinformation.

Für das *Grundbündel* sind die betrachteten Kontexte in Abb. 8.1 symbolisch dargestellt. Dabei wird die Übertragungsmatrix entsprechend Abb. 3.13 auf Seite 41 in Nutzsignal führende und in Störsignal führende Elemente aufgeteilt. Erstere sind in Abb. 8.1 in der linken Spalte, letztere in der rechten Spalte aufgetragen. Ein schwarzes Kästchen steht für ein unbesetztes Feld, ein helles für eine sehr gute Übertragung. Die oberste Zeile zeigt den MIMO-Fall: Alle Elemente der Übertragungsmatrix führen Nutzsignale, entsprechend ist die Matrix in der linken Spalte voll besetzt. Externe Störungen kommen mit Ausnahme des Rauschens nicht vor, folglich bleibt die Matrix in der rechten Spalte leer.

Unten ist in Abb. 8.1 ein eingeschränkter 2+8-Kontext dargestellt. Stets führen die beiden unmittelbar benachbarten Elemente der Hauptdiagonalelemente noch Nutzsignal und sind daher links besetzt, während alle anderen als externe Störer wirken und rechts besetzt sind.

## 8 Bewertung an einem Beispiel

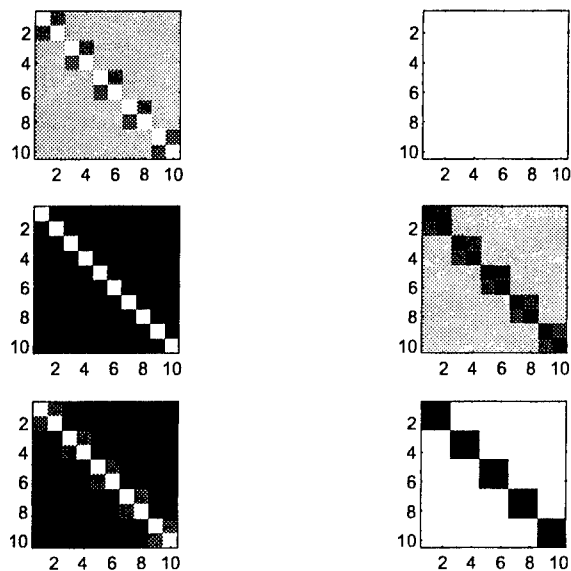


Abbildung 8.1: Drei verschiedene Kontexte im 10-paarigen Grundbündel. Im linken Diagramm sind jeweils die Nutzsignal führenden Übertragungspfade markiert, im rechten die Störsignal führenden. Oben: MIMO-Kontext. Alle Übertragungspfade werden genutzt, es treten keine gegenseitigen Störungen durch Nebensprechen auf. Mitte: SISO-Kontext. Jede Doppelader wird für sich betrachtet, d. h. nur die von Sender  $k$  zu Empfänger  $k$  führenden Übertragungspfade führen Nutzsignalanteile. Alle anderen Übertragungspfade werden als Nebensprechstörung betrachtet (rechts). Unten: Vierer-Kontext. Die zwei Doppeladern eines Sternvicers werden als 2I2O-System betrachtet. Alle anderen Doppeladern wirken als Nebensprechstörer.

### 8.1 Die Szenarien

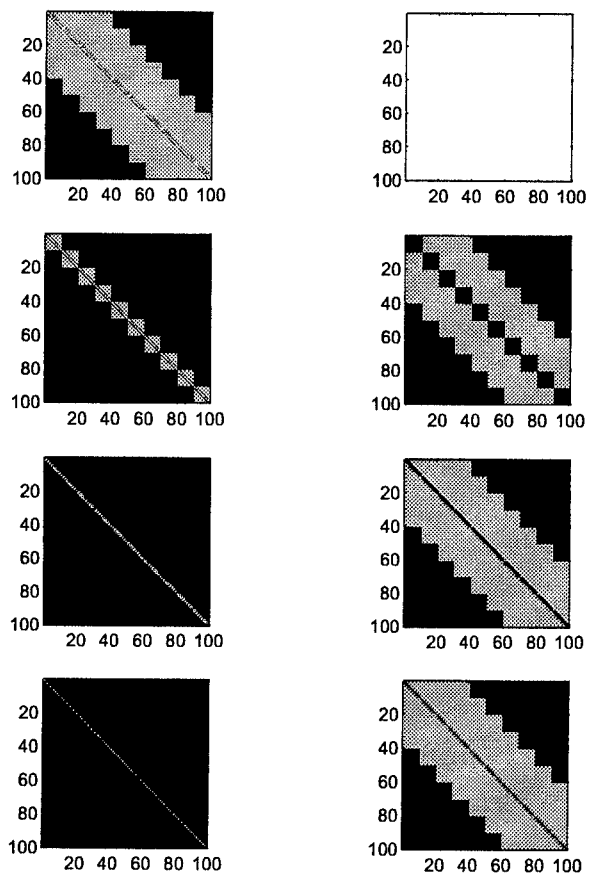


Abbildung 8.2: 100-paariges Hauptkabel: Vom MIMO-Kontext (oben) über Grundbündel-Kontext (zweites von oben) und Vierer-Kontext (zweites von unten) zum SISO-Kontext (unten). Zur Erläuterung siehe die Bildunterschrift zu Abb. 8.1.

## 8 Bewertung an einem Beispiel

Eine entsprechende Darstellung der betrachteten Kontexte für das *Hauptkabel* findet sich in Abb. 8.2. Die unterschiedlichen Grauwerte korrespondieren mit der Nachbarschaftsbeziehung der Adernpaare, vgl. Abschnitt 8.1.1. Von der Vielzahl der möglichen Kombinationen werden im Folgenden näher betrachtet (von oben nach unten in Abb. 8.2):

**MIMO** Im Optimalfall werden alle Sender und Empfänger gemeinsam betrachtet.

**10+90** Die Grundbündel werden als MIMO-Subsysteme angesehen, Grundbündel untereinander als externe Störer.

**2+98** Die Sternvierer werden als MIMO-Subsysteme angesehen, Grundbündel untereinander als externe Störer. Dies entspricht der Sichtweise in den Arbeiten von Fischer, Huber und Komp [Hub93, FHK94].

**1+99** Alle Adernpaare werden unabhängig betrachtet und wirken gegenseitig als externe Störer. Die Sendespektren werden jedoch gemeinsam optimiert.

**SISO** Alle Adernpaare werden unabhängig betrachtet und wirken gegenseitig als externe Störer. Die Sendespektren sind alle identisch.

## 8.2 Sendespektren

Die Sendespektren ergeben sich nach Gleichung 5.18 durch Water pouring aus den Eigenwerten  $\lambda_i(f)$ . Der Zusammenhang zwischen Eigenschaften des MIMO-Systems und dem Verlauf dieser Eigenwerte ist also durchaus von Interesse. Insbesondere die Spreizung der Eigenwerte soll hier kurz beleuchtet werden.

Abbildung 8.3 zeigt im Vergleich die Eigenwerte für einen einzelnen Sternvierer bei 500 m und 5 km. Bei der kleineren Entfernung fällt eine wesentlich stärkere Spreizung auf. Dieser Effekt ist ganz einfach zu erklären: Die starke Dämpfung zu höheren Frequenzen hin führt bei der großen Kabellänge zu einer Konzentration des Sendespektrums bei niedrigen Frequenzen. Dadurch wird im Vergleich zur kleinen Kabellänge die Wirkung des Nebensprechens, das mit der



## 8.2 Sendespektren

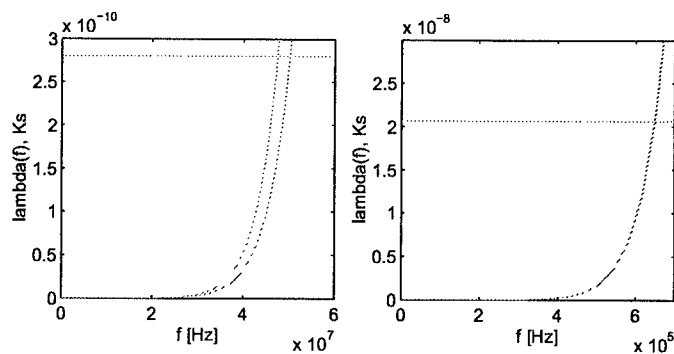


Abbildung 8.3: Verlauf der Eigenwerte von  $\Gamma(f)$  bei einer Kabellänge von 500 m (links) bzw. 5 km (rechts). Die waagerechte Linie zeigt den „Füllstand“ an, der sich durch Water pouring ergibt (vgl. Gleichung 5.17).

Frequenz stark ansteigt, erheblich abgeschwächt. Mit anderen Worten: Bei der großen Kabellänge verlieren die Nebendiagonalelemente der Übertragungsmatrix im Vergleich zu den Hauptdiagonalelementen an Gewicht.

Dieser Effekt lässt sich in gleicher Weise am Grundbündel zeigen. Dazu werden die Nebendiagonalelemente von  $\tilde{\Gamma}(f)$  (willkürlich) abgeschwächt. Dies entspricht einer Verringerung der Kreuzkorrelationen der äquivalenten Störung im Kanalmodell nach Abb. 5.4 (unten). Abbildung 8.4 zeigt die Wirkung einer Änderung des mittleren Störungskorrelationskoeffizienten gemäß der Definition 5.6 auf Seite 90. Oben ist der Verlauf der Eigenwerte bei 500 m Länge und der Korrelation entsprechend dem Kabelmodell [Wei89, Wei93] aufgetragen. In der Mitte wurde der Korrelationskoeffizient um 70 % verringert, unten auf Null gesetzt.

Daraus lassen sich folgende Schlussfolgerungen ziehen:

1. Die Spreizung der Eigenwerte nimmt mit dem mittleren Korrelationskoeffizienten der äquivalenten Störung zu.
2. Bei kurzen Längen verhalten sich Kabel wegen des gegensätzlichen Frequenzverhaltens von Übertragungsdämpfung und Nebensprechdämpfung

## 8 Bewertung an einem Beispiel

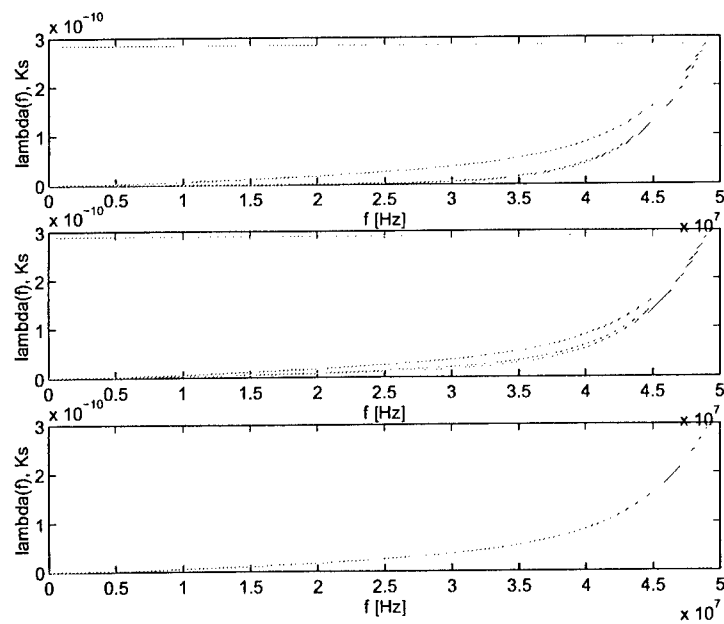


Abbildung 8.4: Wirkung der Nebensprech-Übertragungsfunktionen auf die Spreizung der Eigenwerte von  $\Gamma(f)$ . Oben: Eigenwerte für das Kabelmodell bei  $\ell = 500$  m. Mitte: Die Nebendiagonalelemente von  $\tilde{\Gamma}(f)$  wurden hier betragsmäßig auf 30 % reduziert. Unten: Alle Nebendiagonalelemente wurden Null gesetzt.

### 8.3 Ergebnisse zur Kapazität

MIMO-typischer, bei großen Längen SISO-typischer.

Daraus folgt zweifelsfrei, dass im Bereich kürzerer Längen und hoher Übertragungsraten ein höherer MIMO-Gewinn zu erwarten ist.

### 8.3 Ergebnisse zur Kapazität

Die Auswertung der Kapazitätsgleichung (5.13) für den Sternvierer ist in Abb. 8.5 dargestellt. Die oberste Kurve im linken Diagramm zeigt den Verlauf der Kapazität im MIMO-Kontext. Knapp darunter verläuft die maximale Transinformation im SISO-Kontext bei ausschließlichem Fernnebensprechen (FEXT). Ein SISO-Kontext mit zusätzlichem Nahnebensprechen (untere Kurve) führt zu großen Verlusten.

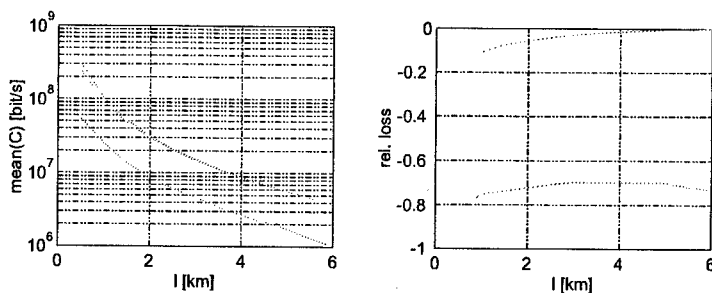


Abbildung 8.5: Kapazität des Sternvierers. Links, von oben: MIMO-Kontext, SISO-Kontext mit ausschließlichem Fernnebensprechen, SISO-Kontext mit Nah- und Fernnebensprechen. Rechts ist der relative kontextbezogene Verlust der SISO-Kontexte (untere Linie: Nah- und Fernnebensprechen, obere Linie: nur Fernnebensprechen) gegenüber dem MIMO-Kontext aufgetragen.

Hinsichtlich des Unterschiedes zwischen MIMO und SISO (FEXT) täuscht die logarithmische Darstellung etwas: Der kontextbezogene Verlust (vgl. Definition 5.3 auf Seite 88, rechtes Diagramm in Abb. 8.5) beträgt bei kurzen Kabellän-

## 8 Bewertung an einem Beispiel

gen 20 %. In Übereinstimmung mit den Erkenntnissen aus dem vorangehenden Abschnitt nimmt dieser Verlust mit wachsender Kabellänge ab.

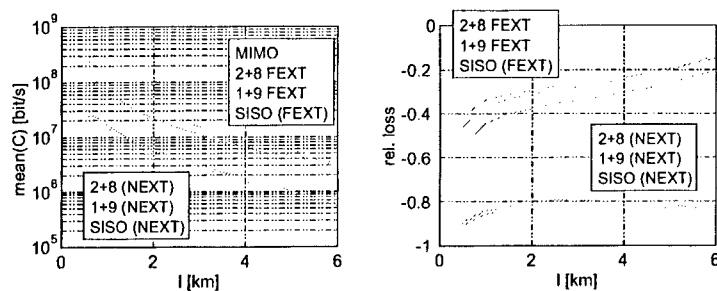


Abbildung 8.6: Kapazität des Grundbündels (links, man achte auf die logarithmische Skalierung der Ordinate) in Abhängigkeit des Kontextes und relativer Unterschied eingeschränkter Kontexte im Vergleich zum MIMO-Kontext (rechts).

Die entsprechenden Ergebnisse für das Grundbündel sind in Abb. 8.6 wiedergegeben. Hervorzuheben ist hier der im Vergleich zum Sternvierer wesentlich größere Verlust eingeschränkter Kontexte auch bei größeren Kabellängen. Hier lässt sich erkennen, dass

1. die Betrachtung von Nahnchensprechen als Störung zu den größten Verlusten führt,
2. der kontextbezogene Verlust wesentlich größer ist als beim Sternvierer,
3. die Gliederung des Grundbündels in  $2 \times 2$ -Subsysteme in Übereinstimmung mit [FHK94] keinen erkennbaren Gewinn bringt,
4. die Spreizung der Eigenwerte zu einem erkennbar geringeren Verlust des 1+9 Kontextes gegenüber dem SISO-Kontext führt.

Die Betrachtung des 100-paarigen Hauptkabels führt zu ähnlichen Ergebnissen, vgl. Abbildung 8.7. Bemerkenswert ist der hohe kontextbezogene Verlust schon

### 8.3 Ergebnisse zur Kapazität

des 10+90-Kontextes (über 70 % bei kurzen Längen, 40 % bei größeren Längen). Im heute üblichen Betrieb mit SISO-Kontext und nicht kompensiertem Nahnebensprechen wird bei allen Längen 90 % der erreichbaren Transinformation verschenkt.

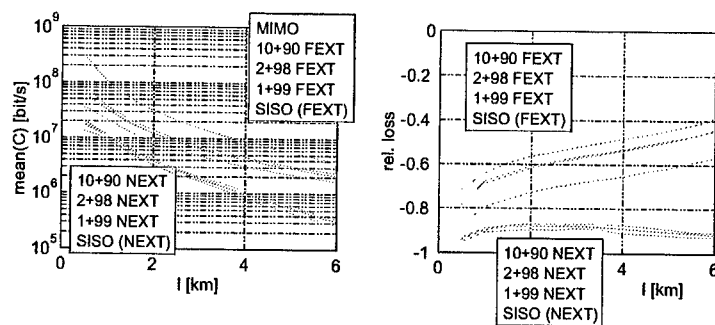


Abbildung 8.7: Kapazität des 100-paarigen Hauptkabels (links, man achte auf die logarithmische Skalierung der Ordinate) in Abhängigkeit des Kontextes und relativer Unterschied eingeschränkter Kontexte im Vergleich zum MIMO-Kontext (rechts).

Zusammenfassend lässt sich feststellen:

- Der kontextbezogene Verlust nimmt mit steigender Dimensionalität stark zu.
- Durch nicht kompensiertes Nahnebensprechen gehen bis zu 90 % der erreichbaren Transinformation verloren.
- Eine Aufteilung eines MIMO-Kanals in MIMO-Subsysteme mit beschränktem Kontext bringt keinen wesentlichen Gewinn.
- Bei ausschließlicher Fernnebensprechen kommt der Berücksichtigung der Spreizung der Eigenwerte auch bei  $1 + (m - 1)$ -Kontext Bedeutung zu: Das  $1 + (m - 1)$ -System ist hier immer deutlich besser als das System im SISO-Kontext.

## 8 Bewertung an einem Beispiel

- Bei ausschließlichem Fernnebensprechen nimmt der kontextbezogene Verlust aller beschränkten Kontexte mit kürzer werdendem Kabel stark zu.

### 8.4 Bewertung des technischen Aufwands

Für eine technische Realisierung ist nicht nur die tatsächlich erreichbare Transinformation von Interesse, sondern auch der erforderliche Schaltungsaufwand. Vom heutigen Stand aus betrachtet heißt die Frage: Mit welchem zusätzlichen Aufwand gegenüber den üblichen Systemen mit SISO-Kontext lässt sich ein System mit MIMO-Kontext implementieren?

#### 8.4.1 Vergleichskriterien

Im Folgenden wollen wir anhand des bisher betrachteten Szenarios vergleichend gegenüberstellen:

- den Aufwand für  $m$  parallele DFE-Systeme im SISO-Kontext,
- den Aufwand für  $m$  parallele DMT-Systeme im SISO-Kontext,
- den Aufwand für ein  $m$ -dimensionales MIMO-DFE-System,
- den Aufwand für ein  $m$ -dimensionales MIMO-DMT-System.

Der Einfluss der Dimensionalität  $m$  wird durch Betrachtung einer einzelnen Doppelader ( $m = 1$ ), eines Sternvierers ( $m = 2$ ), eines Grundbündels ( $m = 10$ ) und eines 100-paarigen Hauptkabels ( $m = 100$ ) untersucht. Dem Einfluss des Übersprechens wird durch Betrachtung einer kurzen Kabellänge ( $l = 500$  m, geringe Dämpfung, hohes Fernnebensprechen) und einer größeren Kabellänge ( $l = 4$  km, hohe Übertragungsdämpfung, geringeres Fernnebensprechen) Rechnung getragen.

Wir beschränken die Betrachtung auf den Fall reinen Fernnebensprechens, da hier die Wirkung des MIMO-Kanals am deutlichsten sichtbar ist. Nahnebensprechen kann im MIMO-Kontext ohne Wirkung auf die Störungskorrelationen kompensiert werden.

#### 8.4 Bewertung des technischen Aufwands

Generell wurde im Folgenden der Aufwand für eine MAC-Operation gleich dem Aufwand einer simplen Operation gesetzt (vgl. Abschnitt 6.2):  $a_{MAC} = a_0 = 1$ . Dies entspricht einer Realisierung mit einem Signalprozessor. Aufgrund des geringen Einflusses der simplen Operationen auf den Gesamtaufwand in allen Fällen entsteht durch eine andere Gewichtung (z. B. bei Realisierung als Schaltung) keine grundsätzlich andere Tendenz.

Die Bitrate  $R_B$  im Nenner der Beziehungen (6.21) bzw. (7.23) für den Aufwand wurde durch die maximal erreichbare Transinformation gemäß den Ergebnissen im vorangehenden Abschnitt ersetzt. Da beide Systeme – DFE und DMT – gleiche Voraussetzungen für das Erreichen der Kanalkapazität mitbringen, ist dies eine faire Annahme für den Vergleich. Der Grundaufwand  $a_{MAC}$  und  $a_0$  wurde in beiden Fällen auf die Symboldauer normiert, was für den Vergleich unerheblich ist.

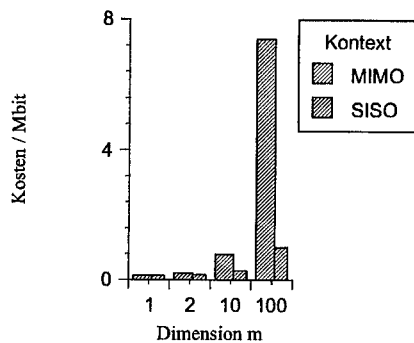


Abbildung 8.8: Vergleich des Aufwandes pro übertragenem Megabit für DFE-Empfänger mit MIMO- bzw. SISO-Kontext bei (fiktiver) Übertragung mit einer der Kanalkapazität entsprechenden Rate bei einer Kabellänge von 500 m.

##### 8.4.2 Ergebnisse

Die Abbildungen 8.8 und 8.9 zeigen den Aufwand (pro übertragenem Megabit) für  $l = 500$  m bzw.  $l = 4$  km. Die Parameter des DFE-Empfängers für die Berechnung des Aufwands sind in Tabelle 8.1 zusammengestellt.

## 8 Bewertung an einem Beispiel

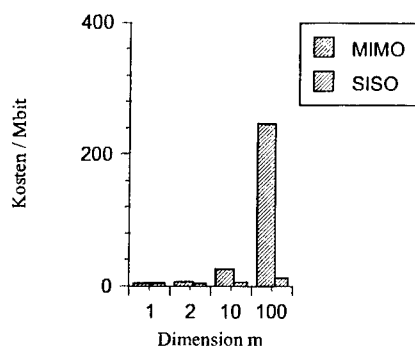


Abbildung 8.9: Vergleich des Aufwandes pro übertragenem Megabit für DFE-Empfänger mit MIMO- bzw. SISO-Kontext bei (fiktiver) Übertragung mit einer der Kanalkapazität entsprechenden Rate bei einer Kabellänge von 4000 m.

Der Aufwand ist in den Abbildungen auf die Anzahl der Dimensionen normiert, so dass ein direkter Vergleich möglich ist. Der mit  $m$  steigende Aufwand für das DFE-System im SISO-Kontext erklärt sich aus der mit  $m$  sinkenden erreichbaren Transinformation bei gleichbleibender Komplexität von Sender und Empfänger.

Parameter	Wert
Filterlänge Feedback-Filter $n_b$	5
Filterlänge Vorwärtsfilter $n_c$	15
Filterlänge Sendefilter $n_s$	15

Tabelle 8.1: Gewählte Parameter für die Berechnung des Aufwands eines DFE-Empfängers

Generell ist bei keiner Kabellänge und für keine Dimension das MIMO-DFE-System im Hinblick auf die Kosten je übertragenem Bit günstiger als eine entsprechende Anzahl paralleler SISO-Systeme. Wenn nicht die absolut erreichbare Bitrate das alleinige Kriterium darstellt, sind multidimensionale DFE-Systeme also nicht wirtschaftlich. Wegen des sehr ähnlichen Aufbaus gilt das in gleicher Weise für Systeme mit Vorverzerrung nach Tomlinson-Harashima



#### 8.4 Bewertung des technischen Aufwands

[Tom71, HM72].

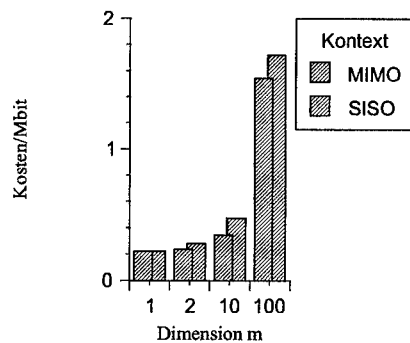


Abbildung 8.10: Vergleich des Aufwandes pro übertragenem Megabit für DMT-Systeme mit MIMO- bzw. SISO-Kontext bei (fiktiver) Übertragung mit einer der Kanalkapazität entsprechenden Rate bei einer Kabellänge von 500 m.

Die entsprechenden Ergebnisse für DMT-Systeme sind in den Abbildungen 8.10 und 8.11 dargestellt. Tabelle 8.2 fasst die zugrunde liegenden Annahmen zusammen.

Parameter		Wert
Größe der FFT	$N$	512
Länge des Cyclic Prefix	$n_p$	32
Filterlänge Time-domain Equalizer	$n_{TEQ}$	5

Tabelle 8.2: Gewählte Parameter für die Berechnung des Aufwands eines DMT-Empfängers

Bei der kurzen Länge (Abb. 8.10) ergibt sich über alle betrachteten Dimensionen eine wirtschaftliche Überlegenheit des MIMO-DMT-Systems gegenüber parallelen DMT-Systemen im SISO-Kontext. Die durch den MIMO-Kontext wesentlich höhere erreichbare Bitrate ist also bei geringeren Kosten pro übertragenem Bit erreichbar, als dies bei heutigen Systemen der Fall ist.

## 8 Bewertung an einem Beispiel

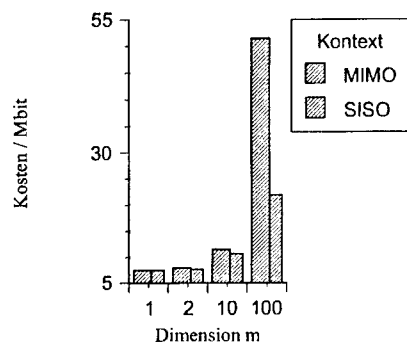


Abbildung 8.11: Vergleich des Aufwandes pro übertragenem Megabit für DMT-Systeme mit MIMO- bzw. SISO-Kontext bei (fiktiver) Übertragung mit einer der Kanalkapazität entsprechenden Rate bei einer Kabellänge von 4000 m.

Generell interessant ist der etwa um 70 % höhere Aufwand eines SISO-DMT-Systems im Vergleich zu einem DFE-System. Dieser Aufwandsvorteil des DFE-System schwindet aber wegen der aufwandsbestimmenden Kreuzfilter schnell dahin, so dass für ein 100-dimensionales MIMO-System ein DMT-System nur 20 % des Aufwands eines DFE-Systems erfordert.

Beim längeren Kabel (Abb. 8.11) ist der Gewinn an erreichbarer Transinformation durch den MIMO-Kontext geringer ausgeprägt. Damit steigen die Kosten pro Bit für das MIMO-System stärker an und betragen beim 100-paarigen Kabel etwa das 2,3-fache des parallelen SISO-Systems. In Anbetracht eines MIMO-Gewinns von 2,8 (vgl. Abb. 8.7) ist dies nicht exorbitant hoch. Je nach der Priorität von Wirtschaftlichkeit oder erreichbarer Übertragungsrate kann ein MIMO-System also auch hier eine interessante Alternative sein.

Zusammenfassend lässt sich feststellen:

- Für SISO-Kanäle sind DMT-Systeme aufwendiger als DFE-Systeme.
- MIMO-Kanäle führen – unabhängig vom Kontext und den gewählten Übertragungssystemen – immer zu höheren Kosten pro übertragenem Bit.

---

#### 8.4 *Bewertung des technischen Aufwands*

- Mit steigender Dimensionalität sind MIMO-DMT-Systeme zunehmend aufwandsgünstiger realisierbar als MIMO-DFE-Systeme.
- Bei stark übersprechenden MIMO-Kanälen (kurze Kabel) ist mit DMT-Systemen der MIMO-Gewinn bei gleichzeitig niedrigeren Kosten pro übertragenem Bit realisierbar.

Die Kombination aus DMT und MIMO-Kontext erlaubt also eine weitere Annäherung an die Kanalkapazität bei vertretbaren – im Vergleich zu DFE-Systemen äußerst günstigen – Kosten.

---

8 *Bewertung an einem Beispiel*

## A Verzeichnis der Abkürzungen

<b>ADSL</b>	Asymmetric digital subscriber lines
<b>AKF</b>	Autokorrelations-Funktion
<b>ANSI</b>	American National Standards Institute — <i>Nationale Standardisierungsbehörde der U.S.A.</i>
<b>ATM</b>	Asynchronous Transfer Mode
<b>AWGN</b>	additive white Gaussian noise — <i>additive Überlagerung mit Gauß-verteilter Störung</i>
<b>CAP</b>	Carrierless amplitude/phase modulation — <i>wörtl.: trägerlose Amplituden/Phasenmodulation, richtiger: unmodulierte Bandpaßübertragung</i>
<b>DAVIC</b>	Digital Audio Video Council
<b>DFE</b>	Decision feedback equalization
<b>DMT</b>	Discrete multi-tone — <i>diskrete Vielträger-Übertragung</i>
<b>DWT</b>	Diskrete Wavelet-Transformation
<b>DWMT</b>	Discrete wavelet multi-tone — <i>diskrete Vielträger-Übertragung mit Wavelet- anstelle der Fourier-Transformation</i>
<b>ETSI</b>	European Telecommunications Standards Institute — <i>Europäische Behörde für Standards in der Telekommunikation</i>
<b>FEXT</b>	Far end crosstalk — <i>Fernnebensprechen</i>

## A Verzeichnis der Abkürzungen

<b>FFT</b>	Fast Fourier Transform — <i>schnelle diskrete Fourier-Transformation</i>
<b>FIR</b>	Finite impulse response — <i>endliche Impulsantwort</i>
<b>FSE</b>	Fractionally-spaced Equalizer — <i>Digitales FIR-Filter, das mit einem Vielfachen der Symbolfrequenz (bzw. einem Bruchteil des Symbolabstands) betrieben wird. Übernimmt üblicherweise in Empfängern die Funktionen von Whitened-Matched-Filter und linearem Entzerrfilter.</i>
<b>HDSL</b>	High bit rate digital subscriber lines
<b>IIR</b>	Infinite impulse response — <i>unendlich ausgedehnte Impulsantwort</i>
<b>IWV</b>	Impulswahlverfahren
<b>LDS</b>	Leistungsdichtespektrum
<b>LTI</b>	Linear time-invariant — <i>lineares, zeitinvariantes [System]</i>
<b>MAPSE</b>	Maximum a-posteriori sequence estimation — <i>Empfängerregel; maximiert die Detektionssicherheit für die gesamte empfangene Nachricht unter Berücksichtigung der gesamten Empfangssequenz und der Quellensymbolwahrscheinlichkeiten (A-priori-Wahrscheinlichkeiten).</i>
<b>MAPSSE</b>	Maximum a-posteriori single-symbol estimation — <i>Empfängerregel; maximiert die Detektionssicherheit für ein einzelnes Symbol unter Berücksichtigung der gesamten Empfangssequenz und der Quellensymbolwahrscheinlichkeiten (A-priori-Wahrscheinlichkeiten).</i>
<b>MIMO</b>	Multiple-input multiple-output — <i>Bezeichnung für Systeme oder Kanäle mit jeweils mehreren Ein- und Ausgängen. Ein- und Ausgangsgrößen werden häufig zu Vektoren zusammengefaßt.</i>
<b>MISO</b>	Multiple-input single-output — <i>Bezeichnung für Systeme oder Kanäle mit vielen Eingängen und einem Ausgang.</i>

<b>MLSE</b>	Maximum-likelihood Sequence Estimation — <i>Optimales Verfahren zur Schätzung der gesamten Nachricht (Sequenz von Quellsymbolen) anhand des gesamten beobachteten Empfangssignals, ohne Berücksichtigung von a-priori Wahrscheinlichkeiten.</i>
<b>NEXT</b>	Near end crosstalk — <i>Nahnebensprechen</i>
<b>OAsL-Netz</b>	Ortsanschlußleitungsnetz
<b>PAM</b>	Pulse amplitude modulation — <i>Pulsamplitudenmodulation</i>
<b>POTS</b>	Plain old telephone systems — <i>Das analoge Telefon</i>
<b>QAM</b>	Quadrature amplitude modulation — <i>Quadraturamplitudenmodulation</i>
<b>RS-Code</b>	Reed-Solomon-Code
<b>SISO</b>	Single-input single-output — <i>Bezeichnung für Systeme einem Eingang und einem Ausgang.</i>
<b>VADSL</b>	Very high bit rate asymmetric digital subscriber lines
<b>WMF</b>	Whitened Matched Filter — <i>Optimales Empfänger-Frontend für Backends mit MLSE</i>
<b>WWW</b>	World Wide Web — <i>Internet Informationsdienst mit Hypertext-Möglichkeiten.</i>

---

*A Verzeichnis der Abkürzungen*



## B Verzeichnis der mathematischen Schreibweisen und Symbole

### B.1 Schreibweisen

$\mathbf{A}^{-1}$	Kehrmatrix von $\mathbf{A}$
$\tilde{x}$	komplexwertige Zahl
$ a $	Betrag von $a$
$a^*$	Konjugation von $a$
$x(t) * y(t)$	lineare, kontinuierliche Faltung
$\langle x_\mu \rangle * \langle y_\mu \rangle$	lineare, diskrete Faltung
$\det \mathbf{A}$	Determinante der Matrix $\mathbf{A}$
$\text{diag} \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$	Diagonalmatrix mit $a, b, c, d$ auf der Hauptdiagonalen
$\mathcal{D}\{\langle x_\mu \rangle\}$	$D$ -Transformierte der Folge $\langle x_\mu \rangle$
$\text{DFT}\{.\}$	diskrete Fourier-Transformation
$E\{.\}$	Erwartungswert
$\mathcal{F}\{x(t)\}$	Fourier-Transformierte von $x(t)$
$\tilde{\mathbf{A}}^H$	Transposition und Konjugation von $\tilde{\mathbf{A}}$
$x_i$	Imaginärteil von $x$
$x_r$	Realteil von $x$
$\tilde{\mathbf{A}}^T$	Transposition von $\tilde{\mathbf{A}}$

## B.2 Symbole und ihre Bedeutung

0-9

$\mathbf{0}$  Nullmatrix

$\alpha$ - $\omega$

$\tilde{\Gamma}(f)$  Leistungsdichtematrix der Störung im äquivalenten Kanalmodell

$\kappa$  Kanalnummer bei Mehrträgerverfahren

$\lambda_i(f)$   $i$ -ter Eigenwert von  $\tilde{\Gamma}(f)$

$\tilde{\Lambda}(f)$  Diagonalmatrix aller Eigenwerte von  $\tilde{\Gamma}(f)$

$\phi_{\text{SISO}}, \phi_{\mathcal{K}}$  relativer Verlust an Transinformation durch Betrachtung eines MIMO-Kanals im SISO-Kontext bzw. im Kontext  $\mathcal{K}$

$\rho$  mittleres SNR (harmonisches Mittel)

$\rho_i$  SNR am  $i$ -ten Diskriminator

$\sigma_0^2$  Varianz einer zeitdiskreten Störquelle

A

$a_0$  Aufwand für eine einfache Rechenoperation

$a_{\text{MAC}}$  Aufwand einer Multiply-Accumulate Operation

$A$  Gesamt-Aufwand

B

$\mathbf{b}(D)$   $D$ -Transformierte der Impulsantwort des zeitdiskreten Feedbackfilters eines DFE-Empfängers

C

$\mathbf{c}(D)$   $D$ -Transformierte der Impulsantwort des linearen Vorwärtsfilters im zeitdiskreten Kanalmodell mit Whitened Matched Filter

$C$  Kanalkapazität

$\Delta C_{\text{SISO}}, \Delta C_{\mathcal{K}}$  Verlust an Transinformation durch Betrachtung eines MIMO-Kanals im SISO-Kontext bzw. im Kontext  $\mathcal{K}$

## B.2 Symbole und ihre Bedeutung

### D

$\delta_{i,j}$	Kronecker-Symbol
$\delta(t)$	Dirac-Impuls
$d(\cdot)$	Detektionssignal
$D$	Variable der $D$ -Transformation, entspricht $z^{-1}$ der $z$ -Transformation.
$\mathcal{D}\{\langle x_\mu \rangle\}$	$D$ -Transformierte der Folge $\langle x_\mu \rangle$

### F

$f$	Frequenz
$\mathcal{F}\{x(t)\}$	Fourier-Transformierte von $x(t)$

### H

$h(\cdot)$	Impulsantwort
$H(\cdot)$	Übertragungsfunktion
$\mathbf{H}(f)$	Übertragungsmatrix
$\tilde{H}_E(\cdot)$	Übertragungsfunktion des Empfangsfilters
$H_K(\cdot)$	Kanalübertragungsfunktion
$H_N(\cdot)$	Störfärbungsfunktion
$H_S(\cdot)$	Übertragungsfunktion des Sendefilters

### I

$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
--------------	----------------

### K

$K$	„Füllhöhe“ bei Anwendung von Water-pouring
-----	--

### L

$\ell$	Kabellänge
$\ell_x(\tau)$	Autokorrelierte des Signals $x(t)$
$\tilde{\ell}_x(\tau)$	Kreuzkorrelationsmatrix des vektoriellen Signals $\mathbf{x}(t)$
$L_0$	zweiseitige Leistungsdichte eines weißen Störprozesses
$L_x(f)$	Leistungsspektrum von $x(t)$

## B Verzeichnis der mathematischen Schreibweisen und Symbole

	$L_x(e^{-j2\pi fT})$	Leistungsspektrum von $x(D)$
	$\tilde{\mathbf{L}}_x(f)$	Leistungsdichtematrix von $\mathbf{x}(t)$
N		
	$n(t)$	Störsignal
	$n_0$	Anzahl einfacher Rechenoperationen
	$n_b$	Kanalzahl eines Mehrträgerverfahrens, Länge des Feedback-Filters eines DFE-Empfängers
	$n_c$	Länge des Vorwärts-Filters eines DFE-Empfängers
	$n_p$	Länge des Cyclic Prefix eines DMT-Verfahrens
	$n_s$	Länge des Sendefilters
	$n_{MAC}$	Anzahl an Multiply-accumulate Operationen
	$n_{TEQ}$	Länge des Time domain equalizers eines DMT-Empfängers
	$N$	PunktezahI einer FFT
Q		
	$q_{UD}$	Bitratenverhältnis Upstream/Downstream
R		
	$r(\cdot)$	Empfangssignal
	$R_b$	Bitrate
S		
	$s(\cdot)$	Sendesignal
	$S$	Summe der Sendeleistungen aller Komponenten eines MIMO-Systems
	$S_i$	Sendeleistung der $i$ -ten Komponente
T		
	$t$	kontinuierliche Zeit
	$T'$	Periodendauer
	$T_A$	Abtasttakt
	$T_S$	Dauer eines Sendesymbols
X		

---

## B.2 Symbole und ihre Bedeutung

$x(D)$	$D$ -Transformierte von $\langle x_\mu \rangle$
$x(e^{j2\pi fT})$	(gefaltetes) Fourier-Spektrum von $\langle x_\mu \rangle$
$x(t)$	zeitkontinuierliches, skalarcs Signal
$\langle x_\mu \rangle$	zeitdiskretes, skalarcs Signal
$X(f)$	Fourier-Transformierte von $x(t)$
$\mathbf{x}(\cdot)$	Spaltenvektor $\left( x_1(\cdot) \ x_2(\cdot) \ \dots \ x_n(\cdot) \right)^T$
$\mathbf{\tilde{x}}(\cdot)$	Matrix mit $m \times n$ Elementen $x_{ij}(\cdot)$

---

*B Verzeichnis der mathematischen Schreibweisen und Symbole*

## Literaturverzeichnis

- [ads95]    *The ADSL Forum*, November 1995.
- [AHM92]    AHRNDT, THOMAS, HANS HOFFMANN und ROLF MATZNER: *Ein Baukasten zur Simulation nachrichtentechnischer Systeme*. In: *Proc. 37. Int. Wissenschaftliches Kolloquium der Technischen Hochschule Ilmenau*, September 1992.
- [Aif95]    AIFA, KHALED BEN: *Optimierung der Sendespektren von DMT-Systemen für MIMO-Kanäle (Ortskabel)*. Diploma thesis, Technical University Munich, 1995. (in deutscher Sprache).
- [ANS93]    ANSI T1E1.4/94-007R5: *Draft American National Standard for Telecommunications: Asymmetric digital subscriber line (ADSL) Metallic Interface Specification*, 1993.
- [Bla83]    BLAHUT, RICHARD E.: *Theory and Practice of Error Control Codes*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1983.
- [BW74]    BRANDENBURG, L. H. und A. D. WYNER: *Capacity of the Gaussian Channel With Memory: The Multivariate Case*. *Bell Syst. Techn. J.*, 53(5):745–778, Mai 1974.
- [CM96]    CZECH, CHRISTIAN B. und ROLF MATZNER: *High Performance Parallel DSP Real-Time OS-Kernel*. In: *Proc. ECC 1996*, Seiten 429–434, Paris, Oktober 1996. (<http://www.sse.de/docu.html>).
- [CsM98]    CZECH, CHRISTIAN B., JIŘÍ VAŠÁTKO und ROLF MATZNER: *On the Design of Data Communication Mechanisms for Parallel DSP Systems*. In: *Proc. Int. Conf. on Signal Processing Applications and Technology*, Toronto, Canada, September 1998.

#### Literaturverzeichnis

- [DH92] DUEL-HALLEN, A.: *Equalizers for multiple input/multiple output channels and PAM systems with cyclostationary input sequences*. IEEE J. Select. Areas Commun., JSAC-10(3):630–639, April 1992.
- [ECM96] ECK, PETER, XIE CHANGSONG und ROLF MATZNER: *On the Optimum Detection of Synchronization Codes*. In: *Proc. ICSPAT Int. Conf. On Signal Processing Applications and Technology*, Seiten 186–190, Boston, Ma, USA, Oktober 1996.
- [EM91] ENGLBERGER, FERDINAND und ROLF MATZNER: *Automatic code generation for tightly coupled recursive processes*. In: *Applications of Transputer 3 – Proc. of the 3rd Int. Conf.*, Seiten 584–589, Glasgow, UK, August 1991.
- [EM97] ECK, PETER und ROLF MATZNER: *A Low Complexity Soft-Output Decoder for a Broad Class of Trellis Coded Modulation Schemes*. In: *Proc. IEEE Int. Symposium on Information Theory*, Seite 501, Ulm, Germany, Juni 1997.
- [EXMT95] ECK, P., CH. XIE, R. MATZNER und K. TRÖNDLE: *Verbesserte Kanalcodierung von MPEG-quellencodierten Bildsequenzen für ADSL*. Technischer Bericht Federal Armed Forces Univ. Munich, Inst. Commun. Eng., 1995. (in deutscher Sprache).
- [Fal76] FALCONER, D. D.: *Jointly Adaptive Equalization and Carrier Recovery in Two-Dimensional Digital Communication Systems*. Bell Syst. Techn. J., 55(3), März 1976.
- [FHK94] FISCHER, ROBERT, JOHANNES HÜBER und GÜNTHER KOMP: *Coordinated Digital Transmission: Theory and Examples*. Int. J. Electronics and Commun., 48(6):289–300, 1994.
- [Fis96] FISCHER, ROBERT: *Mehrkanal- und Mehrträgerverfahren für die schnelle digitale Übertragung im Ortsanschlussleitungsnetz*. Doktorarbeit, Universität Erlangen-Nürnberg, 1996. (in deutscher Sprache).
- [FM94] FORSTER, JOSEF und ROLF MATZNER: *Trellis-Shaping als ein Verfahren zur Leitungscodierung — Theorie, Ergebnisse und Ver-*



gleich mit anderen Verfahren. Kleinheubacher Berichte, 37:157–166, 1994. (in deutscher Sprache).

- [For72] FORNEY, JR., G. D.: *Maximum likelihood sequence estimation of digital sequences in the presence of intersymbol interference*. IEEE Trans. Inform. Theory, IT-18:363–378, 1972.
- [For73] FORNEY, JR., G. D.: *The viterbi algorithm*. IEEE Proceedings, 61:268–278, 1973.
- [For88] FORNEY, JR., G. D.: *Coset Codes—Part I: Introduction and Geometrical Classification*. IEEE Trans. Inform. Theory, IT-34:1123–1151, September 1988.
- [For89] FORNEY, JR., G. D.: *Multidimensional Constellations—Part I: Introduction, Figures of Merit, and Generalized Cross Constellations*. IEEE J. Select. Areas Commun., SAC-7:877–892, August 1989.
- [fz-94] *Statistische Modellierung breitbandig gemessener Impulsstörungen auf Ortskabeln FZ 442 TB 78*. Technischer Bericht Deutsche Bundespost Telekom, Research Center, Mai 1994.
- [Gal68] GALLAGER, ROBERT G.: *Information Theory and Reliable Communication*. John Wiley & Sons, New York, 1968.
- [GW81] GITLIN, R. D. und S. B. WEINSTEIN: *Fractionally-Spaced Equalization: An Improved Digital Transversal Equalizer*. Bell Syst. Techn. J., 60(2), Februar 1981.
- [HAM93] HOFFMANN, HANS, THOMAS AHRNDT und ROLF MATZNER: *Computer aided demonstration and design of the principles of communication systems*. In: *Proc. Int. Conf. Computer Aided Engineering Education*, Bucarest, 1993.
- [HM72] HARASHIMA, H. und H. MIYAKAWA: *Matched-transmission technique for channels with intersymbol interference*. IEEE Trans. Commun., COM-20:774–780, August 1972.

#### Literaturverzeichnis

- [Hub93] HUBER, J.: *Distance-gains by multiple-duplex transmission, coding, and shaping for HDSL*. In: *Proc. IEEE International Conference on Communications*, Seiten 1820–1824, Geneva, 1993.
- [Hub94] HUBER, J.: *Multilevel-Codes: Distance Profiles and Channel Capacity*. In: *ITG-Fachtagung "Codierung für Quelle und Kanal" (Fachbericht 130)*, Seiten 305–319, Munich, 1994.
- [IH77] IMAI, H. und S. HIRAKAWA: *A new multilevel coding method using error correcting codes*. *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-23:371–377, Mai 1977.
- [Kah86] KAHIL, PETER (Herausgeber): *ISDN – Das künftige Fernmeldenetz der Deutschen Bundespost*. R. v. Deckers, Heidelberg, 1986.
- [LM97] LETSCH, KLEMENS und ROLF MATZNER: *The Relation Between Input and Output Probability Density for Discrete-Time Linear Systems - An Approximational Approach*. In: *Proc. 30th Annual Conference on Information Sciences and Systems*, Seiten 460–461, Baltimore, Md, USA, März 1997.
- [LM98a] LETSCH, KLEMENS und ROLF MATZNER: *Construction of Random Processes With Adjustable Power Spectrum and Probability Density Function*. In: *Proc. Midwest Symposium on circuits and Systems*, Notre Dame, IN, USA, August 1998.
- [LM98b] LETSCH, KLEMENS und ROLF MATZNER: *Construction of Random Processes With Adjustable Power Spectrum and Probability Density Function*. In: *Proc. Int. Symposium on Inf. Theory and its Applications ISITA*, Mexico City, Mexico, Oktober 1998.
- [Luc69] LUCKY, R. W.: *Signal Filtering with the Transversal Equalizer*. In: *Proc. Seventh Annual allerton conf. on Circuits and System Theory*, Seite 792, Oktober 1969.
- [Mat93a] MATZNER, ROLF: *HDSL design issues — Optimization and achievable gains*. In: *Proc. GLOBECOM '93*, Seiten 1314–1318, Houston, November 1993.

- [Mat93b] MATZNER, ROLF: *An SNR estimation algorithm for complex baseband signals using higher order statistics*. Facta Universitatis, Series: Electronics and Energetics, 6:41–52, 1993.
- [Mat97] MATZNER, ROLF: *Solving Typical DSP Problems on Multi-DSP Systems*. In: *Proc. DSP World Spring Design Conference*, Seiten 101–116, Washington D.C., USA, März 1997.
- [Mat98] MATZNER, ROLF: *Lehrgangsunterlagen: Digitale Signalverarbeitung II*. Microconsult GmbH, Munich, 1998.
- [MC97] MATZNER, ROLF und CHRISTIAN B. CZECH: *Notes on the Evaluation of a DSP RTOS*. In: *Proc. Int. Conf. on Signal Processing Applications and Technology*, San Diego, Ca, USA, September 1997.
- [ME92] MATZNER, ROLF und FERDINAND ENGLBERGER: *The step from simulation to realization of communication systems*. In: VALERO, M. (Herausgeber): *Parallel Computing and Transputer Applications – Part II*, Seiten 1098–1107, Amsterdam, September 1992. IOS Press.
- [ME94] MATZNER, ROLF und FERDINAND ENGLBERGER: *An SNR Estimation Algorithm Using Fourth-Order Moments*. In: *Int. Symp. Inf. Theory*, Trondheim, 1994.
- [MEH93] MATZNER, ROLF, FERDINAND ENGLBERGER und JOHANNES HUBER: *A digital transmission system using quaternary partial response CPM — Principle structure and measurement results*. In: *Proc. IEEE International Conference on Communications*, Seiten 732–736, Geneva, 1993.
- [MES97] MATZNER, ROLF, FERDINAND ENGLBERGER und RALF SIEWERT: *Analysis and Design of a Blind Statistical SNR Estimator*. In: *AES Engineering Society 102nd Convention*, Munich, März 1997.
- [MK93] MITRA, SANJIT K. und JAMES F. KAISER (Herausgeber): *Handbook for Digital Signal Processing*. John Wiley & Sons, New York, 1993.

#### Literaturverzeichnis

- [ML94] MATZNER, ROLF und KLEMENS LETSCH: *SNR estimation and blind equalization (deconvolution) using the Kurtosis*. In: *Proc. 1994 IEEE/IMS Workshop on Information Theory and Statistics*, Seite 68, Oktober 1994.
- [MS94] MATZNER, ROLF und ANDREAS SCHMIDBAUER: *Blind linear and decision feedback equalizers using fourth-order moments and their performance on twisted pair lines*. In: *Proc. GLOBECOM '94*, Seiten 667–671, San Francisco, CA, November 1994.
- [MT94] MATZNER, R. und K. TRÖNDLE: *Kombinierte Vordcodierung und trelliscodierte Modulation für ADSL*. Technischer Bericht Federal Armed Forces Univ. Munich, Inst. Commun. Eng., 1994. (in deutscher Sprache).
- [Pri72] PRICE, R.: *Nonlinearly feedback-equalized PAM vs. capacity for noisy filter channels*. In: *Proc. IEEE International Conference on Communications*, Seiten 22–12–22–17, 1972.
- [Smi94] SMITH III, JULIUS O.: *Bandlimited Interpolation – Introduction and Algorithm*. <http://cmn19.stanford.edu/~jos/src/src.html>, Department of Music, Stanford University, 1994.
- [TM92] TRÖNDLE, K. und R. MATZNER: *Impulsinterferenz-Kompensationscodierung*. Technischer Bericht Federal Armed Forces Univ. Munich, Inst. Commun. Eng., 1992. (in deutscher Sprache).
- [TMF93] TRÖNDLE, K., R. MATZNER und J. FORSTER: *Trellis-Shaping und Vordcodierung*. Technischer Bericht Federal Armed Forces Univ. Munich, Inst. Commun. Eng., 1993. (in deutscher Sprache).
- [Tom71] TOMLINSON, M.: *New automatic equaliser employing modulo arithmetic*. *Electronics Letters*, 7:138–139, March 1971.
- [Ung82] UNGERBÖCK, G.: *Channel coding with multilevel/phase signals*. *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-28:55–67, Januar 1982.

- [Vit67] VITERBI, A. J.: *Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm*. IEEE Trans. Inform. Theory, IT-13:260–269, 1967.
- [Wei97] WEISSE, DIRK: *Parallelisierung der FFT und des Viterbi-Algorithmus für die Berechnung auf Signalprozessoren*. Diploma thesis, Federal Armed Forces University Munich, 1997. (in deutscher Sprache).
- [Wel89] WELLHAUSEN, H.-W.: *Eigenschaften symmetrischer Kabel der Ortsnetze und generelle Übertragungsmöglichkeiten*. Der Fernmelde-Ingenieur, 43(10/11):1–51, 1989. (in German).
- [We193] WELLHAUSEN, H.-W.: *Effiziente Nutzung vorhandener Kupfer-Ortsanschlußleitungsnetze*. Der Fernmelde-Ingenieur, 47(8/9):1–70, 1993.
- [Wer92] WERNER, J. J.: *Tutorial on Carrierless AM/PM — Part I — Fundamentals and digital CAP transmitter*. Technischer Bericht AT&T Bell Laboratories, Middletown, 1992.
- [Wer93] WERNER, J. J.: *Tutorial on Carrierless AM/PM — Part II — Performance of bandwidth-efficient line codes*. Technischer Bericht AT&T Bell Laboratories, Middletown, 1993.
- [Wüt99] WÜTSCHNER, GEORG: *Detektion von DMT-Signalen bei starker Interferenz*. Diplomarbeit, Federal Armed Forces University Munich, 1999. (in deutscher Sprache).
- [XEM95] XIE, CHANGSONG, PETER ECK und ROLF MATZNER: *The Optimum Detection Rule for Aperiodically Imbedded Sync-Codes*. In: *Proc. 1995 IEEE International Symposium on Synchronization*, Essen, Dezember 1995.
- [YR94] YANG, J. und S. ROY: *Joint transmitter–receiver optimization for multi-input multi-output systems with decision feedback*. IEEE Trans. Inform. Theory, IT-40(5):1334–1347, September 1994.